

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS, LETRAS E ARTES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MESTRADO EM EDUCAÇÃO
LINHA DE PESQUISA: ENSINO, APRENDIZAGEM E
DESENVOLVIMENTO HUMANO**

**O ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO COM BASE NA INTER-RELAÇÃO
ENTRE A ARITMÉTICA, A GEOMETRIA E A ÁLGEBRA**

MARIA LUIZA EVANGELISTA GIL

**MARINGÁ
2024**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS, LETRAS E ARTES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MESTRADO EM EDUCAÇÃO
LINHA DE PESQUISA: ENSINO, APRENDIZAGEM E DESENVOLVIMENTO
HUMANO**

**O ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO COM BASE NA INTER-RELAÇÃO ENTRE A
ARITMÉTICA, A GEOMETRIA E A ÁLGEBRA**

Dissertação apresentada por Maria Luiza Evangelista Gil, ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual de Maringá, como um dos requisitos para a obtenção do título de Mestre(a) em Educação.

Linha de Pesquisa: ensino, aprendizagem e desenvolvimento humano

Orientador(a):

Prof^(a). Dr(a).: Luciana Figueiredo Lacanallo Arrais

MARINGÁ
2024

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

G463e	<p>Gil, Maria Luiza Evangelista</p> <p>O ensino de multiplicação com base na inter-relação entre a aritmética, a geometria e a álgebra / Maria Luiza Evangelista Gil. -- Maringá, PR, 2024. 119 f. : il. color., figs., tabs.</p> <p>Orientadora: Profa. Dra. Luciana Figueiredo Lacanallo Arrais. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Humanas, Letras e Artes, Departamento de Pedagogia, Programa de Pós-Graduação em Educação, 2024.</p> <p>1. Teoria histórico-cultural. 2. Anos iniciais do ensino fundamental. 3. Atividade orientadora de ensino. 4. Situação desencadeadora de aprendizagem. 5. Significações matemáticas. I. Arrais, Luciana Figueiredo Lacanallo, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Humanas, Letras e Artes. Departamento de Pedagogia. Programa de Pós-Graduação em Educação. III. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDD 23.ed. 370</p>
-------	---

MARIA LUIZA EVANGELISTA GIL

**O ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO COM BASE NA INTER-RELAÇÃO ENTRE A
ARITMÉTICA, A GEOMETRIA E A ÁLGEBRA**

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr^a. Luciana Figueiredo Lacanallo-Arrais - UEM - Maringá

Prof. Dr. Ademir Damazio - Professor aposentado - Criciúma

Prof. Dr^a. Lussuede Luciana de Sousa Ferro - UEM -Maringá

Data de Aprovação
Maringá, 01 de março de 2024

Dedico este trabalho a todos(as) os(as) professores(as) que se colocam em atividade de ensino e aprendizagem, tendo em vista o desenvolvimento das funções psicológicas superiores dos alunos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus e a Nossa Senhora Aparecida, por me guiarem durante essa trajetória e me darem força diante das dificuldades e ansiedade.

A minha família, em especial aos meus pais Maria Aparecida Lucas Evangelista Gil e Paulo Henrique Gil por sempre me apoiarem e acreditarem no meu potencial. Sou grata por tudo que vocês fazem por mim e não mediram esforços para que eu pudesse me dedicar aos estudos.

Ao meu namorado, minha cunhada e meu irmão, que estiveram ao meu lado durante a escrita da dissertação, me dando apoio e motivação para realizar meu sonho e finalizar mais uma etapa em minha formação.

A minha orientadora, a Professora Dra. Luciana Figueiredo Lacanallo Arrais, a quem eu admiro e me inspiro a ser uma profissional em busca de uma educação de qualidade para que todos desenvolvam suas máximas capacidades humanas. Expresso meu reconhecimento por me orientar com muita afetividade, humanidade e paciência nessa pesquisa.

Ao Professor Dr. Ademir Damazio e a Professora Dra. Lussuede Luciana de Sousa Ferro, que compuseram a banca de avaliação dessa pesquisa, por todas contribuições e reflexões riquíssimas para o desenvolvimento desta dissertação.

A minha companheira de mestrado, Jhenifer Licero Schuete Silva, que juntas compartilhamos experiências, angústias e conhecimentos que contribuíram para nossas pesquisas.

Ao Professor Me. Márcio Rocha e a Professora Regiane Maldonado que se colocaram à disposição e contribuíram para a proposição didática deste trabalho.

A Camila de Lima Santos e ao Edilson dos Santos pelas trocas de experiências e por ajudarem com a leitura desta pesquisa, trazendo contribuições essenciais.

Ao Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática na Infância (GEPEMATI/UEM) e a Oficina Pedagógica de Matemática (OPM/UEM). Coletivos que fortalecem minha formação, pois permitem que nos coloquemos em atividade a fim de pensar a organização do ensino de matemática, em direção ao desenvolvimento humano por meio da apropriação dos conhecimentos científicos.

Ao Programa de Pós-graduação em Educação (PPE/UEM), bem como os professores do Programa e secretários pela formação humana e acolhimento.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES),
pela bolsa de estudos que me permitiu maior dedicação a essa pesquisa.

A Universidade Estadual de Maringá (UEM).

A todos que, de forma indireta ou direta, contribuíram para a realização dessa
pesquisa.

GIL, Maria Luiza Evangelista. **O ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO COM BASE NA INTER-RELAÇÃO ENTRE A ARITMÉTICA, A GEOMETRIA E A ÁLGEBRA.** (120 f.). Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Maringá. Orientadora: (Luciana Figueiredo Lacanallo-Arrais). Maringá, 2024.

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo investigar o ensino do conceito de multiplicação nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a fim de estabelecer a relação entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas. A pesquisa está em consonância com a linha de pesquisa “Ensino, Aprendizagem e Desenvolvimento Humano” do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual de Maringá, assim como com os trabalhos desenvolvidos no Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática na Infância (GEPEMATI/UEM) e na Oficina Pedagógica de Matemática (OPM/UEM). Pautados nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural (THC), em especial em Davydov (1982; 1988), e da Atividade Orientadora de Ensino (AOE) reconhecemos que é preciso superar a lógica tradicional, que tem predominado no ensino dos conceitos multiplicativos, ao limitá-lo apenas à observação direta e à formação do pensamento empírico dos alunos. Pesquisar sobre a multiplicação torna-se, assim, uma necessidade, já que, por meio do domínio desse conceito, o homem passou, histórica e socialmente, a controlar grandes quantidades, de forma rápida e precisa. No intuito de assegurar nas escolas a apropriação da multiplicação a todos os alunos, realizamos uma pesquisa conceitual, de caráter bibliográfico propositivo. A pergunta norteadora de nossa investigação foi: como organizar o ensino de multiplicação, nos anos iniciais de escolarização, em direção ao desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos? Para respondê-la, em um primeiro momento, apresentamos uma revisão de literatura, para identificar as pesquisas realizadas sobre a multiplicação na intenção de assegurar continuidade às investigações sobre o tema. Em seguida, destacamos a matemática como um dos conhecimentos produzidos historicamente que auxilia na humanização, o que evidencia a necessidade de organizar seu ensino. Para viabilizar essa organização, torna-se indispensável compreender a inter-relação entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas, já que a matemática se constitui por meio delas (Davydov, 1982). Na sequência, caracterizamos a metodologia utilizada, pautada no Materialismo Histórico-Dialético, pois este referencial auxilia a determinar os procedimentos realizados para analisar o objeto de estudo. Em seguida, conceituamos a multiplicação e identificamos possibilidades didáticas capazes de instrumentalizar os professores na ação educativa. Por fim, apresentamos uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem (SDA) materializada por meio do recurso metodológico situação emergente do cotidiano elaborada por nós, para trabalhar a ideia de proporcionalidade presente na multiplicação, direcionada a alunos do 4º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental. A escolha por explorar a proporcionalidade justifica-se pois, na revisão de literatura realizada por Gil, Silva e Lacanallo-Arrais (2023), constatamos que não há nenhuma Situação Desencadeadora de Aprendizagem direcionada a esta ideia multiplicativa. A SDA proposta aponta estratégias que auxiliem o professor em sua organização didática e que podem potencializar a aprendizagem, a inter-relacionar as significações matemáticas, na direção de viabilizar generalizações teóricas. O trajeto de pesquisa realizado evidencia que, quando ensinamos a multiplicação, o foco da atuação docente precisa

se voltar à formação do pensamento teórico dos alunos, porém, para isso, é preciso assegurar uma formação inicial e continuada de qualidade a todos os educadores. O professor, ao ter uma formação adequada e espaços de estudo, por meio da atividade de ensino, poderá elaborar recursos didáticos e estratégias que colocam os alunos em atividade de estudo, que potencialize a compreensão da essência do conceito multiplicativo e de todos os demais, já que essas condições promovem a humanização do sujeito de forma plena.

Palavras-chave: Teoria Histórico-Cultural; Atividade Orientadora de Ensino; Significações matemáticas; Anos iniciais do Ensino Fundamental; Situação Desencadeadora de Aprendizagem

GIL, Maria Luiza Evangelista. **TEACHING MULTIPLICATION BASED ON THE INTERRELATION BETWEEN ARITHMETIC, GEOMETRY AND ALGEBRA.** (120 f.). Dissertation (Master in Education) - State University of Maringá. Supervisor: (Luciana Figueiredo Lacanallo-Arrais). Maringá, 2024.

ABSTRACT

This research aims to investigate the teaching of the concept of multiplication in the early years of Elementary School, in order to establish the relationship between arithmetic, geometric and algebraic meanings. The research is in line with the line of research "Teaching, Learning and Human Development" of the Postgraduate Program in Education at the State University of Maringá, as well as with the work developed in the Study and Research Group on Mathematics Education in Childhood (GEPEMATI/UEM in portuguese) and at the Mathematics Pedagogical Workshop (OPM/UEM, in portuguese). Based on the assumptions of the Historical-Cultural Theory (THC, in portuguese), especially in Davydov (1982; 1988), and the Teaching Guiding Activity (AOE, in portuguese), we recognize that it is necessary to overcome the traditional logic, which has predominated in the teaching of multiplicative concepts, by limit it only to direct observation and the formation of students' empirical thinking. Researching multiplication thus becomes a necessity, since, through mastery of this concept, man began, historically and socially, to control large quantities, quickly and precisely. In order to ensure that multiplication is appropriate for all students in schools, we carried out conceptual research, with a purposeful bibliographical nature. The guiding question of our investigation was: how to organize the teaching of multiplication, in the initial years of schooling, towards the development of students' theoretical thinking? To answer this, firstly, we present a literature review, to identify the research carried out on multiplication with the intention of ensuring continuity of investigations on the topic. Next, we highlight mathematics as one of the historically produced knowledge that helps humanization, which highlights the need to organize its teaching. To make this organization viable, it is essential to understand the interrelationship between arithmetic, geometric and algebraic meanings, since mathematics is constituted through them (Davydov, 1982). Next, we characterize the methodology used, based on Historical-Dialectic Materialism, as this framework helps to determine the procedures carried out to analyze the object of study. Next, we conceptualize multiplication and identify didactic possibilities capable of providing teachers with tools in educational action. Finally, we present a Learning Triggering Situation (SDA, in portuguese) materialized through the methodological resource emerging everyday situation created by us, to work on the idea of proportionality present in multiplication, aimed at students in the 4th year of the initial years of Elementary School. The choice to explore proportionality is justified because, in the literature review carried out by Gil, Silva and Lacanallo-Arrais (2023), we found that there is no Learning Triggering Situation directed to this multiplicative idea. The proposed SDA points out strategies that help the teacher in his didactic organization and that can enhance learning, interrelating mathematical meanings, in the direction of enabling theoretical generalizations. The research path carried out shows that, when we teach multiplication, the focus of teaching needs to be on the formation of students' theoretical thinking, however, for this to happen, it is necessary to ensure quality initial and continuing training for all educators. The teacher, by having adequate training and study spaces, through the teaching activity, will be able to develop teaching resources

and strategies that put students into study activities, which enhance the understanding of the essence of the multiplicative concept and all the others, since these conditions promote the humanization of the subject fully.

Key words: Historical-Cultural Theory; Teaching Guiding Activity; Mathematical meanings; Elementary School I; Learning Triggering Situation.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

GEPEMATI - Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática na Infância

OPM - Oficina Pedagógica de Matemática

UEM - Universidade Estadual de Maringá

PIBID - Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

BDTD - Base Digital Brasileira de Teses e Dissertações

INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais

TDAH - Transtorno do déficit de atenção com hiperatividade

UNISUL - Universidade do Sul de Santa Catarina

GPEMAHC - Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma Abordagem Histórico-Cultural

TIC - Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação

GEPAPe - Grupo de Estudos e Pesquisa sobre Atividade Pedagógica

FPS - Funções Psicológicas Superiores

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

THC - Teoria Histórico-Cultural

AOE - Atividade Orientadora de Ensino

SDA - Situação Desencadeadora de Aprendizagem

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Gráfico 1 - Natureza dos trabalhos localizados	22
Quadro 1 - Dissertações localizadas na BDTD e Google Acadêmico	22
Gráfico 2 - Foco das dissertações (2012 - 2021).....	33
Gráfico 3 - Conceitos abordados nas dissertações.	35
Quadro 2 - História virtual do “Verdim e seus amigos”.....	52
Organograma 1 - Ações de estudos com base na história virtual “Verdim e seus amigos”	53
Figura 1 - Recipientes e unidades de medida básica e intermediária.....	78
Figura 2 - Representação gráfica	79
Figura 3 - Exemplo de árvore das possibilidades.	80
Figura 4 - Adição de quantidades iguais.....	82
Figura 5 - Álbum copa feminina 2023.....	89
Figura 6 - Álbum <i>Marvel</i>	89
Figura 7 - Página do álbum para completar.....	89
Figura 8 - Página do álbum com as figurinhas.....	89
Figura 9 - Pacote com 5 figurinhas	90
Figura 10 - Figurinhas douradas.....	90
Figura 11 - Alunos completando o álbum	92
Figura 12 - Figurinhas com os alunos	92
Figura 13 - Proposta de Álbum da copa para colorir.....	93
Quadro 3 - Situação emergente do cotidiano “figurinha da copa”.	94
Organograma 2 - Ações de estudo com base na Situação Desencadeadora de Aprendizagem elaborada.....	96
Figura 14 - Modelagem objetiva	99
Figura 15 - Cálculo das quantidades.	100
Figura 16 - Modelagem gráfica	101
Figura 17 - Operação na reta numérica.....	102

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	15
2. REVISÃO DE LITERATURA: PONTOS DE PARTIDA	20
3. MATEMÁTICA E A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO.....	37
4. A MATEMÁTICA E AS SUAS INTER-SIGNIFICAÇÕES.....	59
4.1. Aritmética	60
4.2. Geometria.....	65
4.3. Álgebra	68
4.4. Inter-relação da aritmética, geometria e álgebra	71
5. METODOLOGIA	73
6. A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DE MATEMÁTICA COM FOCO NA MULTIPLICAÇÃO.....	76
7. PROPOSIÇÃO DIDÁTICA PARA O ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO	86
7.1 Por que explorar como Situação Desencadeadora de Aprendizagem as figurinhas?.....	88
7.2 O problema desencadeador e as ações de estudo	93
7.3 As seis ações de estudo e a situação emergente do cotidiano	97
8. CONSIDERAÇÕES FINAIS	107
REFERÊNCIAS.....	110

1. INTRODUÇÃO

A matemática, para a Teoria Histórico-Cultural, é uma linguagem produzida histórica e socialmente pelo homem, diante de necessidades integrativas e instrumentais. Sendo assim, torna-se indispensável a apropriação dessa linguagem na escola. Porém, apesar de a matemática estar presente em diferentes situações do dia a dia, os conhecimentos empregados têm como base a empiria e o sensorial, ou seja, limitam-se aos aspectos diretos e externos dos objetos e fenômenos (Davióv, 1988). Na busca de superar os limites desse pensamento empírico e compreender a essência dos conceitos, o ingresso na escola é necessário.

Portanto, a fim de se apropriar da essência da matemática, para além da percepção direta, torna-se indispensável planejar e organizar o ensino dessa linguagem de forma intencional na escola (Rosa, 2012). Pensar o ensino de matemática é, contudo, um desafio para os professores, isso porque muitos apontam dificuldades na organização de seu ensino, pois, diversas vezes, em sua experiência como alunos, achavam difícil a compreensão dos conceitos matemáticos. Desse modo, é necessário entendermos como se organiza o ensino dessa área do conhecimento, em especial o de multiplicação, foco de nossa pesquisa.

A fim de refletir como essa organização tem se promovido, passarei a me reportar na primeira pessoa do singular, para relatar minha trajetória acadêmica e profissional, que me leva a questionar alguns aspectos e princípios referentes à compreensão da multiplicação.

Durante a graduação, ao participar do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), pude acompanhar uma turma do 3º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Nessa experiência, observei as aulas de matemática, em que um dos conceitos em foco pela professora, ao longo do ano letivo, foi a multiplicação. Nesses momentos, constatei que o ensino da multiplicação estava reduzido a aspectos empíricos e mecânicos, que tornam o conteúdo vazio de sentido. Pude observar a dificuldade da professora em compreender o conceito em si e elaborar proposições didáticas que colocassem os alunos em atividade de estudo, uma vez que os exercícios trabalhados focavam na repetição e na memorização do conceito.

A organização do ensino se baseava em uma observação direta dos objetos, sem promover a necessidade dos alunos de compreenderem a essência da multiplicação. Em razão disso, comecei a me questionar se essa organização possibilitaria o desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos, o que gerou a necessidade de aprofundar meus estudos sobre a multiplicação.

Para tanto, realizei dois projetos de iniciação científica e fiz meu trabalho de conclusão de curso sobre a multiplicação. Juntamente a estes projetos, comecei a participar da Oficina Pedagógica de Matemática - OPM/UEM, que é um grupo de formação contínua de professores, constituída por graduandos, egressos, professores da rede da educação básica de ensino, pós-graduandos, mestres e doutores que atuam no ensino superior. Nesse grupo, temos como objetivo estudar a organização do ensino da matemática, com a finalidade de elaborar propostas de ensino e de aprendizagem que desenvolvam o pensamento teórico, isto é, possibilitar que alunos e professores compreendam a essência dos conceitos matemáticos. Portanto, as discussões realizadas na OPM/UEM me possibilitaram, por meio do coletivo, conhecer e estudar sobre os pressupostos da Teoria Histórico-Cultural (THC) e da Atividade Orientadora de Ensino (AOE), elaborada por Moura (1996) e colaboradores, como um modo geral de organização do ensino, para que professor e aluno estejam em atividade.

Além dos estudos realizados na OPM/UEM, a participação no Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática na Infância (GEPEMATI) corroborou, ainda mais, para a necessidade da constituição desta dissertação, diante das discussões realizadas em coletivo sobre a organização desse ensino. Conhecer essas perspectivas teóricas e fazer parte desses espaços formativos motivaram-me a compreender a multiplicação e buscar outras possibilidades didáticas que pudessem superar a forma tradicional de ensinar.

Ao aprofundarmos os estudos, identificamos pesquisas sobre a multiplicação, como a de Hobold (2014), Galdino (2016), Rosa e Hobold (2016), Crestani (2016) e Berneira (2021), que evidenciam a falta de apropriação e de compreensão teórica dos professores sobre os conceitos multiplicativos. Essas pesquisas indicam que a não apropriação dos conceitos pelos professores se reflete nas proposições elaboradas no trabalho docente, que centram as ações de ensino, em sua maioria, na percepção das características aparentes e empíricas do conceito estudado. Além disso, o ensino exige apenas a memorização dos resultados de tabuada, mas sem a compreensão do

que esse cálculo envolve (Hobold, 2014). Portanto, o ensino dessa operação aritmética tem sido realizado de forma isolada, sem inter-relacionar à essência da matemática, ou seja, às suas significações.

Ao ingressar na escola, o mínimo a oferecer ao estudante é a oportunidade de apropriação desse conceito, de modo a reconhecê-lo como um conhecimento elaborado historicamente que permite a realização de cálculos rápidos e precisos. Ao compreender a multiplicação, o homem pode solucionar problemas, a fazer uso de estratégias e de raciocínios próprios do pensamento teórico.

Desse modo, o problema de pesquisa que se apresenta é o seguinte: como organizar o ensino de multiplicação, nos anos iniciais de escolarização, que oportunize as condições para o desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos? Fundamentadas na Teoria Histórico-Cultural, nos estudos de Davydov¹ (1982, 1988) e na Atividade Orientadora de Ensino, seguimos em defesa de que todos na escola precisam se apropriar do conhecimento científico, sem qualquer distinção. Isso porque, ao compreender determinado conceito, o professor pode se apropriar de princípios teórico-metodológicos que o instrumentalizam a planejar ações voltadas à formação plena dos alunos.

Assim, definimos o objetivo geral: investigar – de modo propositivo – o ensino do conceito de multiplicação nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a fim de estabelecer a relação entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas. Essa investigação traz a identificação de possibilidades para o professor conhecer outra proposição didática que lhe auxilie a organizar o ensino de multiplicação, a fim de superar a lógica tradicional em direção ao desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos.

Para tanto, na primeira seção desta exposição, intitulada *Revisão de literatura: pontos de partida*, apresentamos pesquisas realizadas sobre a multiplicação, de acordo com o referencial teórico adotado. Uma revisão feita junto aos seguintes bancos de dados: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Teses e Dissertações (CAPES); Base Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD); Google Acadêmico. O intuito é assegurar a continuidade e a originalidade da investigação, bem como sua contribuição para os estudos sobre o ensino de multiplicação.

¹ Há diferentes grafias com os nomes de Davydov e Vygotski. Na dissertação, manteremos a grafia original dos textos utilizados.

Após, destacamos a seção *Matemática e a organização do ensino*, na qual caracterizamos o homem como um ser social e histórico, que se constitui por meio de suas relações com o mundo social e natural. Ao estabelecer essas relações em um processo dialético, a condição essencial é que o homem esteja em atividade (Leontiev, 2016) para se apropriar dos conhecimentos historicamente produzidos e desenvolver suas funções psicológicas superiores: sensação, memória, emoção, percepção, pensamento, sentimento, atenção, linguagem e imaginação (Vygotsky, 1931). Ainda nessa seção, caracterizamos a matemática como um desses conhecimentos historicamente produzidos, ou seja, uma linguagem que, ao ser apropriada pelo homem, permite sua satisfação integrativa e instrumental na sociedade. Em busca da compreensão dessa linguagem, discutimos a organização do ensino da matemática pautado em Davydov (1982, 1988) e na Atividade Orientadora de Ensino (AOE).

Posteriormente, na seção *A matemática e as suas inter-significações* e nas subseções *Aritmética, Geometria, Álgebra e Inter-relação da aritmética, geometria e álgebra*, caracterizamos a constituição da linguagem matemática, ao identificar a presença da aritmética, geometria e álgebra e a inter-relação entre essas.

Em seguida, explicitamos a *metodologia* empregada na pesquisa, a ter como base uma pesquisa conceitual, de caráter bibliográfico propositivo, pautada no Materialismo Histórico-Dialético. Consideramos que, numa pesquisa, o conhecimento da metodologia a adotar auxilia na definição dos procedimentos utilizados na compreensão do objeto de estudo, em um movimento dialético.

Na continuidade, temos a seção intitulada *A organização do ensino de matemática com foco na multiplicação*, na qual conceituamos essa operação aritmética, com a identificação das ideias que a compõem e com a indicação das possibilidades didáticas para seu ensino.

Na seção *Proposição didática para o ensino de multiplicação*, apresentamos uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem (SDA), a fim de desenvolver uma das ideias multiplicativas menos explorada nas escolas, com base na revisão de literatura feita, a proporcionalidade. Sistematizamos a Situação Desencadeadora de Aprendizagem por meio do recurso metodológico situação emergente do cotidiano, no intuito de promover a compreensão desse conceito, com base na inter-relação entre as significações matemáticas, como defende Davydov (1982; 1988).

Por fim, destacamos as *Considerações Finais*, com as contribuições da presente pesquisa para a organização do ensino de multiplicação, em busca do desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos.

Esperamos instrumentalizar os professores teoricamente e com possibilidades didáticas para organizar o ensino do conceito de multiplicação, como forma de promover a inter-relação entre as significações matemáticas. Portanto, extrapolar a ênfase na memorização e na repetição dos procedimentos matemáticos desvinculados de compreensão. Dessa forma, esperamos que a presente dissertação mobilize os professores para que as ações de ensino possa assegurar, aos alunos, a compreensão da essência da multiplicação e viabilizar as condições necessárias à promoção da humanização do sujeito de forma plena por meio do trabalho realizado na escola intencionalmente.

2. REVISÃO DE LITERATURA: PONTOS DE REFERÊNCIA

Quando pensamos na matemática, com base na Teoria Histórico-Cultural, partimos do pressuposto de que este conhecimento pode se expressar por meio de diferentes significações, que estão presentes em nosso dia a dia e na própria ciência. A aritmética, a álgebra e a geometria têm especificidades próprias e compõem a matemática, que expressa seus conceitos por medidas, grandezas, formas e variáveis.

Davýdov (1982) afirma que essas três significações configuram a essência do conhecimento matemático e, ao considerar a relação entre elas, temos possibilidades de organizar a aprendizagem dos alunos, de modo a evitar a fragmentação dos conceitos. Para o autor, essa fragmentação estava presente na perspectiva tradicional, que partia de uma ordem cronológica para apresentar os conceitos aos alunos, em sala de aula. Tal ordem iniciava-se com a aritmética, de modo a focalizar nos números naturais e nas operações; depois, voltava-se para a geometria apenas nos últimos bimestres letivos; a álgebra era ensinada apenas em turmas no nível escolar que, no sistema educacional brasileiro, denominamos de anos finais do Ensino Fundamental e Ensino médio. De acordo com a perspectiva tradicional, o conhecimento empírico, com base nas sensações e nas percepções imediatas do aluno, era essencial ao trabalho educativo. Valorizava-se apenas a memorização e a repetição dos conceitos, dos procedimentos e dos resultados.

A compreensão do processo de generalização na literatura psicológica-pedagógica tradicional permite delinear a correlação entre percepção, representação e conceito. [...] No processo de ensino, as crianças são ensinadas a observar consistentemente essa diversidade sensorial particular de objetos e fenômenos, bem como a explicar oralmente os resultados das observações (Davýdov, 1982, p. 22, tradução nossa).

Essa forma de organizar o ensino - com ênfase no conhecimento empírico e nos dados sensoriais do conceito, identificados diante de uma relação direta do aluno com o objeto estudado - enfatiza o caráter visual direto e perceptivo da sua forma aparente, o que precisa ser superado, por incorporação da essência do conceito por outros princípios. Davýdov (1982; 1988) salienta o papel da escola

de formar o pensamento teórico, cujo conteúdo é a existência mediatizada e refletida, que permite aos alunos conhecerem a essência e não somente a aparência dos conceitos. Portanto, Davydov (1982; 1988), juntamente a colaboradores (Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2009), estudou os livros didáticos russos de sua época e concluiu que estes materiais de estudo estavam pautados na perspectiva do ensino tradicional, na formação do pensamento empírico dos alunos. Com base nessas constatações, elaborou, junto a seus colaboradores, livros didáticos para o ensino da matemática, a fim de possibilitar o desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos.

Rosa (2012), ao pesquisar as proposições davydovianas para a educação, aponta ser indispensável, na formação do pensamento teórico, superar os limites da perspectiva tradicional e considerar a inter-relação entre as significações matemáticas. A autora salienta que superar esta perspectiva se “reflete os nexos e relações entre as significações aritméticas (sequência numérica concreta, numerais...), algébricas (variável, expressão algébrica...) e geométricas (reta numérica, segmento de reta, ponto...) do conceito de número em Davydov” (Rosa, 2012, p. 227).

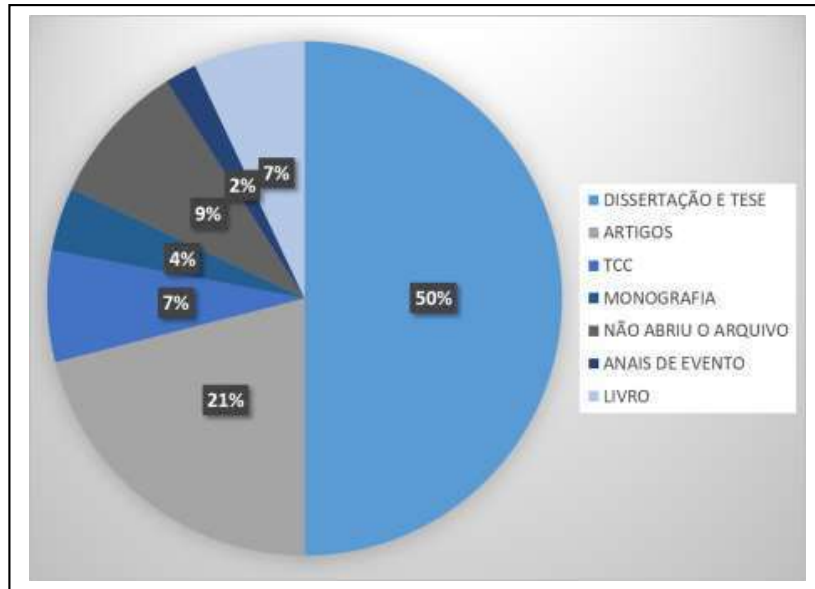
Isso indica que, embora cada significação tenha suas especificidades, há uma indissociabilidade entre a aritmética, a geometria e a álgebra. Mas, como essa inter-relação é compreendida nos anos iniciais do Ensino Fundamental? Como organizar o ensino com base nessa inter-relação entre as significações? É possível pensá-la no desenvolvimento do conceito de multiplicação?

Em busca de respostas a essas questões, faz-se necessário conhecer o que se tem produzido na literatura até o momento. Nesta seção, apresentamos uma revisão de literatura para que possamos assegurar originalidade à nossa pesquisa e, ao mesmo tempo, garantir continuidade às investigações realizadas, no contexto acadêmico e científico. Para tanto, consultamos três bancos de dados gratuitos e de fácil acesso, que nos auxiliaram na investigação e no delineamento da temática. São eles: a Capes - Teses e Dissertações, a Base Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e o Google Acadêmico.

Nas bases de dados pesquisadas, foram identificadas 171 pesquisas. Percebemos, neste quantitativo, uma diversidade na natureza dos trabalhos, com predominância de dissertações e teses de 50%, que correspondem a 15 teses e

71 dissertações, como mostra o Gráfico 1.

Gráfico 1- Natureza dos trabalhos localizados



Fonte: da autora (2024).

Em razão desta predominância, voltamos nossa análise para as 15 teses e 71 dissertações localizadas, ao ter por base a leitura inicial dos resumos. Nenhuma das teses encontradas abordou o conceito de multiplicação. Das dissertações, apenas 10 discutiam a multiplicação, as demais tinham como objeto outros conceitos, como: fração, adição, subtração, álgebra etc. No Quadro 1, sistematizamos as pesquisas localizadas, com destaque para os elementos de identificação inicial, ao seguir a ordem cronológica, da mais recente (2021) para a mais antiga (2012).

Quadro 1 - Dissertações localizadas na BDTD e Google Acadêmico

Ano	Autor/a	Título	Instituição	Banco de dados
2021	BERNEIRA C. R. R.	Formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais.	Universidade Federal do Pampa -Jaguarão	Google Acadêmico
2021	CAMILI, M. C.M.	Estruturas multiplicativas: um estado do conhecimento (2009-2019).	Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - Bauru	Google Acadêmico

2021	FONSECA, C. T. C.	Discalculia associada ao transtorno de déficit de atenção e hiperatividade: um estudo sobre as operações de multiplicação e divisão considerando os mecanismos compensatórios.	Instituto Federal do Espírito Santo	Google Acadêmico
2019	FONTES, M. da S.	Experimento didático desenvolvimental em matemática no contexto do curso de pedagogia.	Universidade do Sul de Santa Catarina	Google Acadêmico
2019	VIANA, A. de S.	Dificuldades com a operação de multiplicação no 6º ano do Ensino Fundamental.	Faculdade Vale do Cricaré	Google Acadêmico
2017	SEBASTIÃO, D.	Teoria da atividade e lousa digital no ensino superior: perspectivas para aprendizagem dos conceitos matemáticos.	Universidade do Extremo Sul Catarinense	BDTD
2016	GALDINO, A. P. da S.	O conhecimento matemático de estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental sobre o conceito de multiplicação: um estudo com base na Teoria Histórico-Cultural.	Universidade do Sul de Santa Catarina	BDTD
2016	CRESTANI, S.	Organização do ensino de matemática na perspectiva de desenvolvimento do pensamento teórico: uma reflexão a partir do conceito de divisão.	Universidade do Sul de Santa Catarina	BDTD
2014	HOBOLD, E. S. F.	Proposições para o ensino de tabuada com base nas lógicas formal e dialética.	Universidade do Sul de Santa Catarina	Google Acadêmico
2012	MADEIRA, S. C.	“Prática”: uma leitura histórico-crítica e proposições davydovianas para o conceito de multiplicação.	Universidade do Extremo Sul Catarinense	BDTD

Fonte: elaborado pela autora (2024).

Ao observar o quadro 1, percebemos que, das 10 dissertações, 7 foram realizadas por programas de Pós-Graduação voltados para a educação, em diferentes universidades. As demais originam de programas de educação em ciência (1), educação em ciência e matemática (1) e de gestão social, educação e desenvolvimento regional (1). A predominância destes programas indica que a multiplicação é investigada por pesquisadores preocupados com a educação básica e com os processos educativos, nas diferentes áreas do conhecimento.

Vale observar que os objetivos de programas dessa natureza – com base na Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Capes² (Brasil, 2021) – está a busca por formar pesquisadores que respondam às necessidades de investigação do campo educacional em articulação com as diversas áreas do conhecimento. Assim, a multiplicação é discutida por pesquisadores preocupados com os processos de aprendizagem e de desenvolvimento humano, com base nas relações estabelecidas no ensino escolar.

Outro destaque a respeito da análise do quadro 1 é que, das 7 pesquisas realizadas no Programa de Pós-Graduação em Educação, 6 delas foram produzidas no Estado de Santa Catarina e uma no Rio Grande do Sul. Isso nos mostra que a região Sul, em particular a Universidade do Sul de Santa Catarina e a Universidade do Extremo Sul de Santa Catarina, tem consolidado pesquisas sobre o ensino de multiplicação com base em Davydov, em nosso país. Trata-se, pois, de um movimento de continuidade e de referência que enriquece toda a discussão acadêmica em torno da temática.

Diante destas considerações iniciais, a análise das dissertações se voltou a pensar sobre os aspectos metodológicos e conceituais discutidos pelos autores. O foco foi identificar a concepção de multiplicação e como a inter-relação entre aritmética, geometria e álgebra é apresentada. Algumas questões foram feitas para nortear as análises: a formação do(a) pesquisador(a); o público participante das pesquisas; a metodologia utilizada; a multiplicação destacada como conceito central ou para desenvolver outro conceito; a ideia multiplicativa central; a pesquisa inter-relacionada entre aritmética, geometria e álgebra.

Por ordem da mais recente, a primeira dissertação analisada foi de Berneira (2021, p. 16), intitulada “Formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais”. Esta define como objetivo: “[...] problematizar as ações de intervenção com as professoras que ensinam Matemática no 3º ano de uma escola municipal de Jaguarão/RS, analisando as contribuições para a formação continuada”. A autora, formada em Ciências Biológicas e Matemática, realizou uma pesquisa intervenção, com perspectiva colaborativa, de cunho qualitativo, em que foi aplicado um questionário a 7 professoras para analisar a formação, a trajetória, a necessidade de formações continuadas e as dificuldades

² A CAPES é o órgão, vinculado ao Ministério da Educação, responsável pela expansão e consolidação da pós-graduação *stricto sensu* (mestrado e doutorado) em todos os estados da Federação.

para o ensino da matemática, nos anos iniciais. Berneira (2021) destaca que, apesar de as professoras não sentirem dificuldades ao ensinar matemática, elas consideram importante a realização de formações continuadas para pensar o ensino dessa ciência.

Diante disso, a pesquisadora planejou uma formação continuada com as professoras que responderam ao questionário; porém, com a pandemia, não foi possível realizar a intervenção com todas. Por consequência, duas professoras do 3º ano do Ensino Fundamental participaram por meio do *Google Meet*. A escolha por professoras destas turmas teve por base os resultados do INEP (2018), ao indicar o 3º ano com maior número de reprovações dos alunos. Berneira (2021) conclui que os encontros realizados com as professoras as instigaram a fazer videoaulas sobre a multiplicação e as auxiliaram a pensar em como desenvolver o trabalho no ensino remoto.

No decorrer da intervenção, as professoras puderam compreender que a multiplicação não envolve apenas a adição de parcelas iguais, mas também a configuração retangular e a combinação. Além disso, essa operação aritmética tem como sua inversa a divisão. Todavia, na pesquisa, não se aborda a inter-relação entre aritmética, geometria e álgebra. Berneira (2021) conclui que as práticas pedagógicas foram reelaboradas. As professoras tiveram a oportunidade de rever suas aulas, a fim de promover a aprendizagem dos alunos, bem como ampliaram a compreensão da própria multiplicação. Constatou-se que, nesta pesquisa, a formação continuada de professores é base para compreender o conceito de multiplicação.

Na sequência, a dissertação intitulada “Estruturas multiplicativas: um estado do conhecimento (2009-2019)” de Camili (2021) adota como base teórica a Teoria dos Campos Conceituais das Estruturas Multiplicativas de Gérard Vergnaud. A autora, formada em matemática e pedagogia, justifica ter feito a escolha pela multiplicação por se tratar de um dos conceitos fundamentais da matemática. Todavia, essa dissertação não será analisada por adotar outro referencial teórico, o qual difere da adotada nesta pesquisa.

Outro trabalho localizado, foi a dissertação “Discalculia associada ao transtorno de Déficit de atenção e hiperatividade: um estudo sobre as operações de multiplicação e divisão considerando os mecanismos compensatórios” de Fonseca (2021), cujo objetivo é “[...] discutir a aprendizagem das operações de

multiplicação e de divisão da estudante com Discalculia associada ao TDAH considerando os Mecanismos Compensatórios, contemplando assim a sua questão central” (Fonseca, 2021, p. 17).

A autora, formada em matemática, realizou uma pesquisa de campo com a adoção do método funcional de estimulação dupla (Vigotski, 1991), com o intuito de analisar os processos cognitivos da criança. Participou da pesquisa uma estudante do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do Espírito Santo, diagnosticada com discalculia associada a TDAH. Fonseca (2021) questiona: como realizar a educação desses alunos de forma que não sejam prejudicados? Esse questionamento é respondido com base na concepção da Educação Matemática Crítica proposta por Skovsmose³ (2001), quando se considera o tema da educação matemática inclusiva. A autora também se fundamenta em Vygotsky, para defender a necessidade da existência de mecanismos compensatórios, como alternativa que auxilia a superar as dificuldades de aprendizagem. Nessa discussão, a proposta de Davydov é apresentada para pensar o ensino dos conceitos de multiplicação e divisão, para alunos com discalculia.

Fonseca (2021) destaca que os alunos apresentam muitas dificuldades na compreensão das operações de multiplicação e divisão, quando o ensino é organizado somente de forma tradicional. Em busca de reverter essa situação, a autora produziu um guia didático com tarefas e orientações sobre as operações básicas da matemática, de modo a estimular o processo de compensação da dificuldade do aluno pelo desenvolvimento de outra função mental não comprometida. Nessa pesquisa, os conceitos de multiplicação e de divisão são utilizados para compreender a organização do ensino para alunos com discalculia associada ao TDAH, mas sem inter-relacionar à aritmética, à geometria e à álgebra.

Fonseca (2021) ressalta a necessidade de mais pesquisas que apontem novas maneiras de ensinar a multiplicação e a divisão voltadas às potencialidades dos alunos. Essas novas maneiras seriam estratégias para compensar suas dificuldades, a fim de promover o desenvolvimento de outras funções mentais,

³ Ole Skovsmose, professor emérito na Universidade de Aalborg (Dinamarca) e pesquisador no curso de pós-graduação em Educação Matemática da UNESP - campus Rio Claro, é um dos precursores do Movimento da Educação Matemática Crítica.

como um caminho e possibilidade para o trabalho em sala de aula.

Nessa direção de apresentar possibilidades para o trabalho em sala de aula, Fontes (2019, p. 29) produziu a dissertação intitulada “Experimento didático desenvolvimental em matemática no contexto do curso de pedagogia”. Seu objetivo foi “[...] investigar o processo de conhecimento das acadêmicas de Pedagogia sobre o modo de organização do Ensino Desenvolvimental dos conceitos de multiplicação e divisão”.

A pesquisadora, formada em pedagogia, realizou um experimento didático desenvolvimental na disciplina Fundamentos e Metodologias de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental, do curso de Pedagogia da UNISUL. Isso ocorre durante a realização de seu estágio de docência do Mestrado. Em sua investigação, com foco na multiplicação e na divisão, foi realizada uma avaliação inicial com os alunos, na qual deveriam elaborar uma proposta didática para o conceito de divisão e de multiplicação. Com essa avaliação, constatou-se o conhecimento inicial das acadêmicas, bem como evidenciou-se a influência da perspectiva tradicional pautada no pensamento empírico, com valorização apenas da memorização e repetição dos conceitos.

Porém, ao estudar as proposições davydovianas, a autora salienta que os conceitos de divisão e de multiplicação devem ir além da memorização e da repetição, de modo a apresentá-los aos alunos como indissociáveis. Isso porque, ao ensinar a multiplicação, pode-se compreender a divisão e vice-versa, de forma a desenvolver o pensamento teórico. Ao partir do entendimento de que a multiplicação e a divisão são operações inversas, Fontes (2019) evidencia, de modo objetivo, a inter-relação entre a aritmética, a geometria e a álgebra, ao ensiná-las.

Após a avaliação inicial, a pesquisadora estruturou um experimento didático desenvolvimental com 6 tarefas davydovianas e 1 do livro didático do 2º ano do Ensino Fundamental I, da coleção Porta Aberta, a fim de promover a compreensão da multiplicação e da divisão. Ao final do experimento didático com as acadêmicas, foi realizada uma avaliação final, na qual se identificou possíveis mudanças no modo de compreender este ensino. Fontes (2019) conclui que, no primeiro momento, as propostas do ensino de multiplicação e de divisão, elaboradas pelas acadêmicas, baseava-se nos princípios da perspectiva tradicional. Mas, com o

trabalho e o desenvolvimento das tarefas desenvolvidas no experimento, elas se apropriaram de alguns elementos do ensino das proposições davydovianas. Com base nessas proposições, as acadêmicas elaboraram um plano de ensino com o conceito de multiplicação e de divisão, o que revelou uma mudança na concepção delas sobre a organização do ensino, direcionada, agora, à formação do pensamento teórico dos alunos.

Em consonância à preocupação da influência da perspectiva tradicional na multiplicação, Viana (2019, p. 59) afirma que esse ensino “[...] tem sido marcado pelo tradicionalismo e as atividades puramente mecânicas”. A dissertação “Dificuldades com a operação de multiplicação no 6º ano do Ensino Fundamental”, produzida por Viana (2019, p.14), objetivou: “conhecer as dificuldades com a operação aritmética da multiplicação de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental”. O foco foi analisar as dificuldades de aprendizagem do conceito de multiplicação de alunos de uma escola estadual de Ensino Fundamental de São Mateus – Espírito Santo.

Viana (2019) é formado em matemática e administração e, por meio da pesquisa quantitativa e qualitativa, realizou uma intervenção que apresenta uma proposição de alternativa investigativa por meio da Engenharia Didática de Matemática, que é uma perspectiva teórica direcionada à organização do ensino. Essa dissertação será desconsiderada em nossa análise, pois, embora tenha sido localizada em nossas buscas com os descritores, o referencial difere do adotado por nós.

Na sequência, analisamos a pesquisa de Sebastião (2017), intitulada “Teoria da atividade e lousa digital no ensino superior: perspectivas para aprendizagem dos conceitos matemáticos”. O objetivo da dissertação é

[...] investigar a proposição de um conjunto de tarefas, a partir de um olhar de pressupostos da Teoria da Atividade (TA), como indicador de possibilidade para a organização de ensino do conceito de medida de tendência central, para o ensino superior, tendo como uma operação o uso da Lousa Digital (Sebastião, 2017, p. 36-37).

A autora, formada em matemática, realizou uma pesquisa com teor propositivo voltado ao ensino superior e fundamentou-se na Teoria da Atividade de Leontiev (2004). O foco foi investigar tarefas elaboradas por Crestani (2016) e Madeira (2012), ao dar continuidade ao movimento de elaboração e produção de

material didático feito pelo Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma Abordagem Histórico-Cultural (GPEMAHC), no período de 2012-2016, do qual as pesquisadoras fazem parte. Ao ter como objeto de estudo o conceito de estatística, em específico a Medida de Tendência Central, a multiplicação e a divisão são apontadas como essenciais na compreensão do conceito, na comparação de várias medidas e no reconhecimento da relação de igualdade entre elas.

Sebastião (2017) explorou as Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação (TIC), ao trazer a Lousa Digital como um recurso para o ensino do conceito de Medida de Tendência Central. Além disso, apresentou as tarefas particulares elaboradas por Crestani (2016) e Madeira (2012), embasadas nos experimentos formativos propostos por Davydov (1987), com o conceito de multiplicação e de divisão. Propôs a resolução dessas tarefas, voltadas ao ensino do conceito de média e mediana. A autora concluiu que a lousa digital auxilia a resolução das tarefas e funciona como um registro interativo, que permite sempre o retorno às resoluções e aos dados anteriores. Em relação às tarefas, Sebastião (2017) afirma que elas ajudam na compreensão dos conceitos de média e mediana, bem como permitem a generalização do conceito, em direção à formação do pensamento teórico.

Nesta pesquisa, o conceito de multiplicação é base para compreender os conceitos de média e mediana. Mesmo sem apresentar a inter-relação entre as significações matemáticas, Sebastião (2017) destaca a importância da multiplicação e divisão na compreensão do conceito de Medida de Tendência Central, com base nas relações entre grandezas. Com a pesquisa, foi possível entender a proposta de Davydov (1982, 1988), por meio das tarefas, para organizar o ensino em direção ao desenvolvimento das potencialidades máximas do psiquismo humano.

Em seguimento, a dissertação “O conhecimento matemático de estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental sobre o conceito de multiplicação: um estudo com base na Teoria Histórico-Cultural”, de Galdino (2016, p. 17), tem como objetivo: “[...] investigar o conhecimento matemático dos estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental sobre o conceito de multiplicação”.

A autora, formada em pedagogia, realizou a pesquisa de campo em uma turma de 3º ano do Ensino Fundamental, com a proposta de Davydov para o ensino de multiplicação. A intenção foi observar uma turma e constatar como o ensino era

realizado. Galdino (2016) verificou que prevalece o ensino na perspectiva tradicional, com foco no pensamento empírico, na memorização e na repetição do conceito de multiplicação. Após esta constatação, em um segundo momento, a autora propôs uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem (SDA) fundamentada na proposição davydoviana, com a mesma turma.

A proposta de SDA foi elaborada pela autora e seu grupo de estudo na Universidade do Sul de Santa Catarina, da qual outras pesquisas, presentes em nossa análise, fazem parte. A investigação aborda os significados de aritmética, de geometria e de álgebra atrelados à multiplicação, identificados no decorrer da resolução do problema. A SDA focou a multiplicação, com a exploração da ideia de adição de parcelas iguais, por meio de uma história virtual, em que a personagem é a mesma do conto popular infantil “Dona Baratinha” (Machado, 2004), com uma turma de 3º ano dos anos iniciais do ensino fundamental. Houve a inter-relação entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas.

Galdino (2016) considera que a proposta de Davydov, para o ensino, é possível e permite que o aluno compreenda o conceito e forme o pensamento teórico. Por meio da pesquisa de campo realizada pela autora, constatou-se que essa proposta é uma possibilidade para o desenvolvimento da multiplicação, de forma a possibilitar a sua compreensão na relação da aritmética, da geometria e da álgebra.

A próxima dissertação analisada é a “Organização do ensino de matemática na perspectiva do desenvolvimento do pensamento teórico: uma reflexão a partir do conceito de divisão”, escrita por Crestani (2016, p. 29). Essa tem como objetivo: “[...] investigar as manifestações da relação universal do conceito de divisão nas tarefas particulares no âmbito das seis ações de estudo”. Crestani (2016) discute a relação entre a Atividade Orientadora de Ensino (AOE) e as proposições davydovianas. Parte do problema desencadeador apresentado na dissertação de Galdino (2016), referente à “Dona Baratinha” (Machado, 2004), em um movimento de continuidade nas pesquisas do GPEMAHC, do qual as pesquisadoras fazem parte.

Crestani (2016), formada em matemática e pedagogia, realizou um estudo bibliográfico sobre as seis ações de Davydov para o ensino e os fundamentos matemáticos de divisão. Ao definir o conceito de divisão, explorou a ideia de operações inversas. As significações aritméticas, geométricas e algébricas foram

inter-relacionadas na resolução das tarefas particulares.

As seis ações são apresentadas por meio de resoluções de tarefas particulares, cuja essência é o conceito de medida. Ao trazer a resolução das tarefas particulares e a história virtual, como recurso metodológico, a autora aborda a multiplicação, com o significado de agrupamento e adição de parcelas iguais. Ao longo da dissertação, Crestani (2016) expõe que os conceitos de multiplicação e divisão possuem a mesma relação interna, ou seja, são operações inversas que utilizam a mesma lógica: $X \cdot Y = Z$ ou $Z / X = Y$. A autora conclui, em seu estudo bibliográfico, que, ao desenvolver as tarefas elaboradas por Davydov, são contempladas as significações aritmética, geométrica e algébrica na resolução das tarefas propostas.

A próxima dissertação localizada foi produzida em 2014 e intitula-se “Proposições para o ensino da tabuada com base nas lógicas formal e dialética” produzida por Hobold (2014, p. 23). Apresenta como objetivo: “[...] investigar o movimento conceitual apresentado na proposição brasileira e na davydoviana, para o ensino da tabuada”.

A pesquisadora, formada em matemática, analisou duas propostas para o ensino da tabuada: a primeira, de uma coleção de livros didáticos presente nas escolas; a segunda, de uma proposição russa. A primeira proposta se objetiva na coleção Porta Aberta, disponível para o 1º, 2º e 3º ano do Ensino Fundamental. A coleção, elaborada por Centurión, Scala e Rodrigues (2011), é a mais utilizada pelos professores em Santa Catarina, estado em que a pesquisa aconteceu.

A segunda proposta, analisada por Crestani (2016), foi a proposição russa de Davydov. A proposição foi materializada em livros didáticos e manuais para professores, cujo ensino tem por base a lógica dialética, direcionada a promover a formação do pensamento teórico dos alunos.

De acordo com a autora, o estado de Santa Catarina fundamenta a proposta curricular das escolas estaduais na Teoria Histórico-Cultural. Ao analisar os livros didáticos, porém, Hobold (2014) conclui que os exercícios de tabuada se baseiam na lógica formal, com os conceitos separados por capítulos e com tarefas que exigem, nas resoluções, apenas a observação externa, restrita ao aspecto sensorial. A autora conclui que “[...] o conceito, neste caso, é resultado da percepção e generalização das características externamente/diretamente

expostas” (Hobold, 2014, p. 184).

Por sua vez, de acordo com Hobold (2014), nos livros didáticos davydovianos, a tabuada é ensinada por meio de um sistema conceitual. Os conceitos não são separados por capítulos e a tabuada é apresentada com fundamentos na medição de grandezas, pela unidade de medida intermediária e propriedades fundamentais da multiplicação (distributiva e comutativa). Essa forma de organização contribui para a introdução das expressões algébricas e numéricas, para o desenvolvimento da multiplicação e da divisão, bem como para a inter-relação entre as significações matemáticas.

Ao analisar propostas tão diferentes, Hobold (2014, p. 190) ressalta que a educação precisa “[...] superar os limites da lógica formal no processo de ensino e aprendizagem dos conhecimentos produzidos historicamente pela humanidade”. Nessa direção, a multiplicação e tantos outros conhecimentos presentes na escola devem ser ensinados de modo inter-relacionado, para contemplar a gênese do conceito, que possibilita, ao aluno, a apropriação dos conhecimentos científicos e a sua compreensão integral.

A última dissertação analisada foi “‘Prática’: uma leitura Histórico-Crítica e proposições davydovianas para o conceito de multiplicação”, de Madeira (2012, p. 30-31). A pesquisa tem como objetivo: “[...] estudar o entendimento de “prática” com base nos pressupostos da Pedagogia Histórico-Crítica e, também, da Teoria Histórico-Cultural com sua objetivação nas proposições davydovianas para o ensino do conceito de multiplicação”.

A autora, formada em matemática, realizou uma pesquisa bibliográfica de cunho qualitativo, para explorar a proposta de Davydov, referente ao ensino de multiplicação. A pesquisa se volta para professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental, no intuito de levá-los a refletir sobre suas práticas de ensino. Na dissertação, é feita a análise de tarefas, propostas nos livros didáticos, elaboradas por Davydov e colaboradores. O estudo aponta como introduzir a multiplicação por meio do conceito de grandezas e parte da escolha de algumas tarefas pertinentes ao conceito e das orientações metodológicas propostas no livro. A autora organizou seu estudo da multiplicação, com a delimitação para as relações entre grandezas de área e de volume.

As tarefas trazem a ideia de adição de parcelas iguais, uma das ideias multiplicativas. Ao fazer a análise, a inter-relação entre as significações aritméticas,

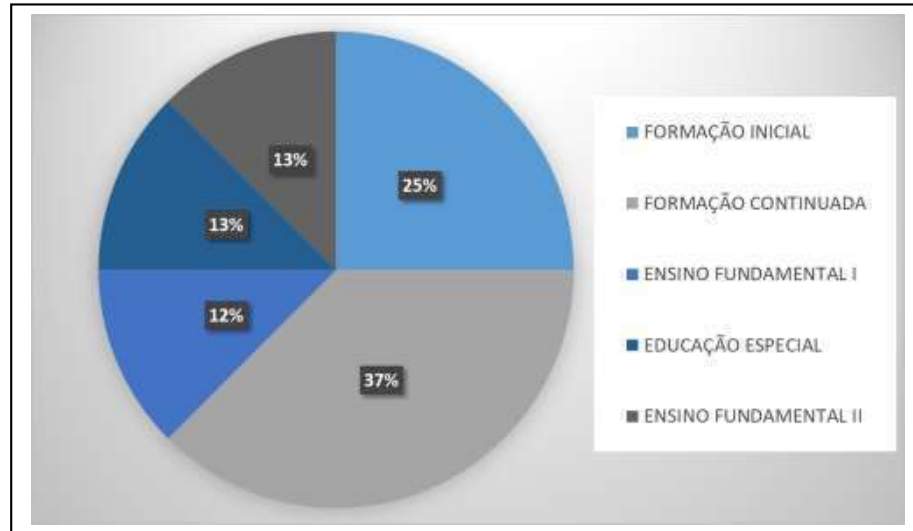
geométricas e algébricas é apontada como uma possibilidade didática, em sua proposta.

[...] as tarefas particulares, propostas por Davydov e colaboradores, referentes à introdução da multiplicação, tem por base um conteúdo geral da própria Matemática, identificado no referido conceito. Esse objeto matemático mais geral é o conceito de grandeza. O estudo da multiplicação é um caso particular da Matemática, o que significa dizer que os estudantes têm certa familiaridade com o objeto geral (Madeira, 2012, p. 159).

Diante disso, a autora conclui que conhecer as tarefas particulares apresentadas por Davydov possibilita, ao professor, refletir sobre sua prática ao ensinar a multiplicação, na direção do desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos e na compreensão daquele conceito.

As análises das dissertações, localizadas em nossa revisão, mostram que as pesquisas de Fontes (2019), Sebastião (2017), Galdino (2016), Crestani (2016) e Hobold (2014) são ligadas aos mesmos grupos de estudo (GPEMAHC/TEDMat), vinculadas à Universidade do Sul e Extremo Sul de Santa Catarina e que fazem parte da unidade catarinense do Grupo de Estudos e Pesquisa sobre a Atividade Pedagógica (GEPAPe/USP). Todas elas, exceto a de Sebastião (2017) e Madeira (2012), têm a mesma orientadora. Com isso, as pesquisas asseguram um movimento de continuidade e ampliação de possibilidades e princípios teórico-metodológicos sobre o ensino de multiplicação na perspectiva de Davydov. A unidade do grupo GEPAPe/USP de Santa Catarina é, atualmente, uma referência nos trabalhos sobre o ensino do conceito de multiplicação com base na Teoria Histórico-Cultural. Além disso, podemos perceber que as 8 pesquisas analisadas possuem focos diferentes em seu público-alvo, como mostra o Gráfico 2.

Gráfico 2 - Foco das dissertações (2012-2021)



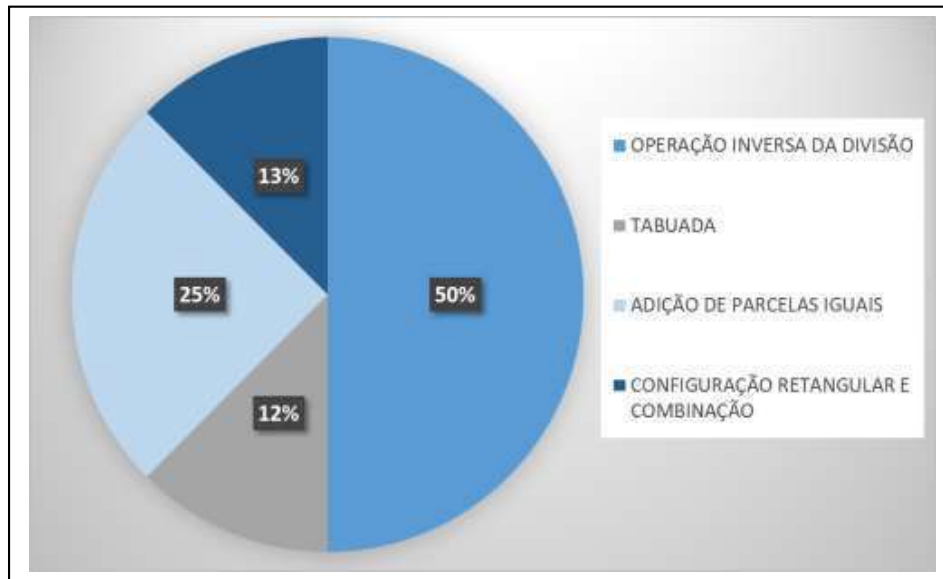
Fonte: elaborado pela autora (2024).

Esses dados revelam que, apesar de abordarem o conceito de multiplicação, somente uma pesquisa está direcionada para o ensino desse conceito com os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, período escolar em que é programado no currículo o trabalho com a multiplicação. Constatamos que 50% das pesquisas voltaram-se à formação de professores. Sabemos que, ao focar na formação de professores, contemplamos os alunos, pois se objetiva que o resultado do processo formativo alcance as salas de aula. Todavia, identificar o movimento de aprendizagem direto dos alunos também é um potencial campo de investigação.

Embora o público participante das pesquisas esteja bem distribuído nas diferentes etapas da educação, a graduação de base dos pesquisadores é a matemática. Destacamos a importância de mais pesquisas realizadas por pedagogos, pois o domínio desse conceito por estes profissionais é essencial, uma vez que a introdução da multiplicação cabe a eles.

A análise das dissertações aponta que, apesar de as pesquisas trazerem o conceito de multiplicação, ele é utilizado como base para a compreensão de outros conceitos matemáticos, como a divisão e medidas de tendência central. Percebemos que a multiplicação com o significado de inverso da divisão foi o mais abordado nas dissertações, seguido do conceito de adição de parcelas iguais e configuração regular e combinação e, em menor quantitativo, a tabuada, como mostra o Gráfico 3.

Gráfico 3 - Conceitos abordados nas dissertações



Fonte: elaborado pela autora (2024).

Além disso, constatamos que as pesquisas analisadas, além de trazerem uma nova proposição, também denunciam a prevalência, no ensino brasileiro, da multiplicação com ênfase em práticas tradicionais do ensino. Como afirmado por

Hobold (2014, p. 16), a educação brasileira trata-se “[...] de uma fiel objetivação dos fundamentos da lógica formal tradicional”. Ou seja, baseia-se em tarefas de reprodução, em que se tem a percepção direta do objeto estudado, portanto, formam o pensamento empírico. Em direção à modificação desse cenário atual, a

inter-relação entre as significações matemáticas, nas propostas de ensino, é apresentada como estratégia didática. Todavia, as pesquisas que discutem a multiplicação, por meio da inter-relação entre às significações aritméticas, geométricas e algébricas, destacam suas contribuições na formação do pensamento teórico e consideram que essa inter-relação ainda é pouco explorada.

Com base na revisão apresentada, temos alguns pontos de referência que justificam a presente investigação proposta, ao considerar a produção voltada ao tema até o momento. Dentre esses, ressaltamos a necessidade de continuidade dos estudos para compreensão dos princípios teórico-metodológicos envolvidos no trabalho docente ao se ensinar a multiplicação, a ter como base teórica as proposições davydovianas. Ampliar os estudos nessa perspectiva se faz necessário, em busca do desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos.

Na direção desse aprofundamento, caracterizamos, a seguir, a matemática e como a sua apropriação possibilita a formação humana por meio de um ensino

sistematizado e intencional, a fim de nos ajudar a compreender o ensino dos conceitos matemáticos, em específico os multiplicativos e as possibilidades didáticas para ensiná-lo.

3. MATEMÁTICA E A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO

O homem, ao nascer, não é dotado das aptidões e das habilidades especificamente humanas. Ele precisa de condições objetivas desenvolvedoras que promovam sua humanização. Para tanto, de acordo com Leontiev (1978a), o homem estabelece relações com o mundo natural e social, a fim de conquistá-las e desenvolvê-las por meio de um processo histórico-cultural. Assim, cada homem, ao nascer, é candidato a ser humano, sendo necessário se apropriar das objetivações genéricas presentes na sociedade, uma vez que se depara com um

[...] mundo de objetos e de fenômenos criado pelas gerações precedentes. [...] apropria-se das riquezas deste mundo participando no trabalho, na produção e nas diversas formas de atividade social e desenvolvendo assim as aptidões especificamente humanas que se cristalizaram, encarnaram nesse mundo (Leontiev, 1978a, p. 266, tradução nossa).

Desse modo, o homem se desenvolve pelas interações que estabelece com a sociedade, mediadas pela cultura humana. Portanto, é necessário manter essas relações para se apropriar de instrumentos e signos⁴, desenvolver-se e assegurar sua sobrevivência.

Os instrumentos psicológicos são criações artificiais; estruturalmente, são dispositivos sociais e não orgânicos ou individuais; destinam-se ao domínio dos processos próprios ou alheios, assim como a técnica se destina ao domínio dos processos da natureza. Como exemplo de instrumentos psicológicos e de seus complexos sistemas, podem servir a linguagem, as diferentes formas de numeração e cálculo, os dispositivos mnemotécnicos, o simbolismo algébrico, as obras de arte, a escrita, os diagramas, os mapas, os desenhos, todo tipo de signos convencionais, etc. (Vigotski, 2004, p. 93-94).

Vygotsky (1931) afirma que, nesse processo de desenvolvimento, o homem desenvolve funções ou estruturas psicológicas elementares/primitivas e superiores/culturais.⁵

⁴Instrumentos são, com base em Vigotski (1996), objetos externos criados pelo homem. Os signos se referem a objetos internos, que auxiliam no desenvolvimento das funções psicológicas superiores. Por exemplo, na aprendizagem da linguagem escrita, a criança precisa dos instrumentos, como: caderno, lápis, etc., para praticar a escrita e necessita do domínio dos signos, ou seja, das palavras e das letras para que a apropriação aconteça.

⁵Padronizamos, nesta dissertação, os termos: funções psicológicas elementares e funções psicológicas superiores.

Na história do desenvolvimento cultural da criança, encontramos duas vezes o conceito de estrutura. Em primeiro lugar, este conceito surge desde o início da história do desenvolvimento cultural da criança, constituindo o ponto inicial ou de partida de todo o processo; e, em segundo lugar, esse mesmo processo de desenvolvimento cultural deve ser entendido como uma mudança na estrutura fundamental inicial e o aparecimento na sua base de novas estruturas, que se caracterizam por uma nova correlação das partes. Chamaremos as primeiras estruturas de primitivas, que é um todo psicológico natural, fundamentalmente determinado pelas peculiaridades biológicas da psique. As segundas estruturas, que nascem durante o processo de desenvolvimento cultural, qualificaremos como superiores, na medida em que representam um grupo geneticamente mais complexo e superior (Vygotsky, 1931, p. 121, tradução nossa).

O homem nasce com funções elementares que caracterizam a dimensão biológica de sua constituição, tal como os animais. De acordo com Vygotsky (1931, p.

156, tradução nossa), “[...] mudanças anatômicas ocorrem no organismo, e o desenvolvimento biológico ocorre com base em mudanças estruturais orgânicas [...]”.

Por isso, as funções elementares são “um todo psicológico natural, determinado fundamentalmente pelas peculiaridades biológicas do psiquismo” (Vygotsky, 1931, p.

360, tradução nossa). Essas funções são responsáveis pelos comportamentos naturais, espontâneos e imediatos que possibilitam, ao homem, responder às demandas que comprometem sua sobrevivência física. Por exemplo, o bebê, ao sentir fome, chora para manifestar sua necessidade de se alimentar. A ação de chorar é uma função elementar, pois, neste momento, ele não tem o domínio da linguagem. Por isso, para expressar sua fome, começa a chorar de forma espontânea e imediata.

Porém, somente as funções elementares não asseguram o processo de humanização, à medida que nas “[...] funções e processos psíquicos inferiores estão incluídos os processos naturais, espontâneos, biológicos [...]” (Vygotsky, 1931, p. 350, tradução nossa). Tais funções se fazem essenciais para satisfazer as necessidades integrativas e de sobrevivência “tanto do animal quanto do homem sobre uma base reflexa, que condiciona suas ações por aspectos fusionais entre estímulo e resposta” (Martins, 2014 p. 88).

Torna-se indispensável, ao homem, ter qualificado as funções elementares para que se tornem superiores, a fim de assegurar a sobrevivência humana, a relação com outros homens e a apropriação da cultura, que é constituída historicamente e determinada socialmente. As funções, responsáveis por esses processos, são as superiores (FPS), sendo elas: sensação, memória, emoção, percepção, pensamento,

sentimento, atenção, linguagem, imaginação (Vygotsky, 1931). Ao nascer, o homem é dotado dessas funções, porém elas se reduzem à esfera biológica da psique. A partir do momento em que a criança começa a estabelecer “uma interação mediada entre o homem e a natureza e incluir uma atividade autêntica, não provocada apenas pelo estímulo” (Vygotsky, 1931, p. 355, tradução nossa), acontece a complexificação da atividade humana. Assim, tais funções se tornam conscientes e assumem uma nova forma de existência. Desenvolver as FPS,

não consiste em adquirir novas funções psicofisiológicas naturais, mas em combinação complexa de funções elementares, no refinamento de formas e modos do pensamento, na elaboração de novos modos de pensamento que se apoiam mutuamente, principalmente, na linguagem ou em algum outro sistema de sinais (Vygotsky, 1996, p. 226, tradução nossa).

Desse modo, as funções psicológicas superiores se constituem, ao longo da vida do homem, pelos processos culturais, históricos e sociais com os quais o homem estabelece relações. Portanto, para o desenvolvimento dessas funções, é necessário que a criança tenha contato com outros sujeitos e vivências compartilhadas de experiências culturais diferentes, pois, assim, poderá internalizar e consolidar sua individualidade e novas formas de condutas mais elaboradas. É preciso destacar que, de acordo com a Teoria Histórico-Cultural,

[...] toda função no desenvolvimento cultural da criança aparece em cena duas vezes, em dois planos; primeiro no plano social e depois no psicológico, a princípio entre os homens como categoria intersíquica e logo no interior da criança como categoria intrapsíquica (Vygotsky, 1931, p. 361, tradução nossa).

Ao internalizar estas formas sociais mais elaboradas, o homem se apropria da cultura historicamente constituída e, por consequência, desenvolve meios de comunicação e expressão que asseguram a vida em sociedade. Isso evidencia que somente o nascimento não garante a humanização da criança, depende da apropriação da cultura produzida historicamente pela humanidade. O desenvolvimento psíquico implica no “aprender a ser um homem” (Leontiev, 1978a, p. 267, tradução nossa).

Esse desenvolvimento requer que o indivíduo seja impulsionado a estar em atividade. Estar em atividade possibilita, ao homem, desenvolver-se e se transformar psiquicamente. A atividade pode ser definida como

aqueles processos que, realizando as relações do homem com o mundo, satisfazem uma necessidade especial correspondente a ele. [...] Por atividade, designamos os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar essa atividade, isto é, o motivo (Leontiev, 2016, p. 68).

O autor destaca que a atividade é constituída por elementos estruturantes que a definem: necessidade, motivo, ações e operações. Para Leontiev (1978a), a necessidade é o que se precisa para satisfazer a atividade. Por sua vez, o motivo se refere ao que impulsiona a busca de soluções que possam satisfazê-la. A ação é definida como “um processo cujo motivo não coincide com seu objetivo (isto é, com aquilo para o qual ele se dirige), mas reside na atividade da qual ele faz parte” (Leontiev, 2016, p. 69). Ou seja, as ações que satisfazem a atividade. As operações se referem ao modo que as ações são executadas para satisfazer uma necessidade.

Embora cada elemento estruturante tenha uma especificidade própria, em seu conjunto, eles não são estáticos e imutáveis, mas articulados entre si e com modificações qualitativas ao longo do desenvolvimento em relação à força mobilizadora. Isso indica que, em algum momento, o que era ação pode se tornar operação e vice-versa, de modo a ocupar outro lugar na estrutura da atividade. De acordo com Leontiev (2016, p. 75), para que ocorra essa mudança na estrutura da atividade, “[...] é preciso que se apresente à criança um novo propósito com o qual sua ação dada tornar-se-á o meio de realizar outra ação. [...] aquilo que era o alvo da ação dada deve ser convertido em uma condição da ação requerida pelo novo propósito”.

Essas mudanças nos elementos constitutivos asseguram ainda mais movimento das funções psíquicas no homem em atividade e ampliam as possibilidades de impulsionar a formação da sua consciência e personalidade⁶. No decorrer da vida, as atividades se alteram em determinados momentos e idades. Isso significa que existem umas que potencializam qualitativamente as transformações

⁶ De acordo com Leontiev (2004, p. 95), a consciência deve ser considerada “[...] no seu devir e no seu desenvolvimento, na sua dependência essencial do modo de vida, que é determinado pelas relações sociais existentes e pelo lugar que o indivíduo considerado ocupa nestas relações”. Portanto, ela se forma nas relações que o homem estabelece no mundo com o outro e é considerada como um movimento interno particular do homem atrelado à atividade humana. Por sua vez, a personalidade é definida por Leontiev (1978b, p. 137-138, tradução nossa) como “[...] uma formação integral de tipo especial. Não se trata de uma integridade genotipicamente condicionada: a personalidade não nasce, a personalidade se faz. [...] A personalidade é um produto relativamente avançado do desenvolvimento histórico, social e ontogenético do homem”, sendo formada por meio da atividade humana.

psíquicas, denominadas de atividades principais, e outras que assumem uma posição secundária no desenvolvimento psíquico, reconhecidas como atividades acessórias.

O que caracteriza, porém, uma atividade principal? De acordo com Leontiev (2016), a atividade principal se define por três atributos: 1. por meio dela outras atividades aparecem e se diferenciam entre si; 2. é a atividade de formação ou reorganização dos processos mentais específicos; 3. depende intimamente das principais mudanças psicológicas na personalidade humana em um determinado período do desenvolvimento.

Com base nessa caracterização, Leontiev (2016, p. 64) define atividade principal como aquela “cujo desenvolvimento governa as mudanças mais importantes nos processos psíquicos e nos traços psicológicos da personalidade da criança, em um certo estágio de seu desenvolvimento”. Em cada período da vida, há uma atividade principal que guia o desenvolvimento psíquico e, ao superá-la, surgirá outra atividade principal, mas cada uma delas com o mesmo objetivo, ou seja, o desenvolvimento do homem. Elkonin (1987, p. 108, tradução nossa) destaca que “[...] cada estágio de desenvolvimento psíquico é caracterizado pela relação determinada, que orienta, naquela etapa, a criança para a realidade, por um determinado tipo de atividade”.

Nesse sentido, a atividade da criança não se limita à principal, pois há outras que contribuem “com algo para o desenvolvimento psíquico da criança [...] Cada tipo de atividade ajuda a dominar as ações e a formar as qualidades psíquicas necessárias para realizar e aperfeiçoar esse tipo de atividade” (Mukhina, 1996, p. 48). Essas atividades, chamadas de secundárias ou acessórias, ficam em segundo plano, mas também são responsáveis pelo desenvolvimento psíquico. Por exemplo, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a atividade principal da criança é o estudo, mas, de acordo com Elkonin (1969, p. 527), o jogo, atividade principal do período pré-escolar “segue tendo uma influência fundamental em seu desenvolvimento psíquico, já que no tempo livre das ocupações escolares os estudantes jogam muito e com entusiasmo”.

Esse movimento em relação às atividades faz com que uma atividade principal, em um dado momento, torne-se secundária em outro. Desse modo, “os processos que são linhas principais de desenvolvimento, em uma idade, se convertem em linhas acessórias de desenvolvimento, na idade seguinte, e vice-versa” (Vygotsky, 1996, p. 262, tradução nossa). Essas mudanças, no papel que as atividades exercem no desenvolvimento, são impulsionadas por alterações no lugar ocupado pela pessoa

nas relações sociais e pelas modificações na relação dominante com a realidade. Assim, “à medida que seu significado e peso específico na estrutura geral do desenvolvimento mudam, muda sua relação com a nova formação central” (Vygotsky, 1996, p. 262, tradução nossa). Portanto, não é a idade a responsável pelas mudanças. Em vez disso, elas “dependem de seu conteúdo e se alteram *pari passu* com a mudança das condições histórico-sociais” (Leontiev, 2016, p. 65).

É preciso destacar que “uma mudança na atividade principal proporciona a base para outras mudanças, caracterizando o desenvolvimento da psique” (Leontiev, 2016, p. 72). Mas, o fato é que essas transições ocorridas – em relação às atividades principal e secundária – caracterizam a formação do psiquismo. Mesmo com a mudança de lugar da atividade, ela não deixa de existir. Porém, ocupa um novo lugar no desenvolvimento do indivíduo e altera a relação de modo que “velhos motivos perdem sua força estimuladora, e nascem os novos, conduzindo a uma reinterpretação de suas ações anteriores” (Leontiev, 2016, p. 82).

Essas transições são mobilizadas por meio de crises que alteram as necessidades, os motivos, as ações e as operações, ou seja, a atividade principal do sujeito. Para Abrantes e Eidt (2019, p. 2), as crises são “momentos de ruptura necessários ao desenvolvimento psíquico [...] momentos de transformação qualitativa”.

Desse modo, com essas transições em relação às atividades principais, estudiosos da Teoria Histórico-Cultural elaboraram a periodização do desenvolvimento psíquico. A periodização estuda as diferentes atividades principais, ao longo da vida do indivíduo, as quais identificam as particularidades e especificidades caracterizadoras desde o nascimento à velhice. As atividades principais identificadas: são comunicação emocional direta do bebê; atividade objetual manipulatória; jogo de papéis; atividade de estudo; comunicação íntima pessoal e atividade profissional/estudo, as quais passamos a conhecer brevemente fundamentadas nos estudos de Elkonin (1987).

De acordo com o autor, ao nascer, o bebê, aproximadamente do 0 a 1 ano de idade, tem como atividade principal a comunicação emocional direta. Nela, por meio de suas emoções e diante de sua total incapacidade biológica, o bebê depende do adulto para sobreviver. É pela relação estabelecida entre os dois - por meio do sorriso, choro, balbucios, expressões faciais e corporais - que o bebê percebe e sente o mundo. Na busca de se expressar, sem o domínio da comunicação por palavras, ele

chora, por exemplo, para expressar suas necessidades: fome, dor e desconfortos. Ao final do primeiro ano de vida, o bebê aprende a se comunicar por meio da linguagem (que antes inexistia) e tem condições para a “assimilação de procedimentos de ação socialmente elaborados com objetos” (Elkonin, 1987, p. 117, tradução nossa). Isso porque emerge a atividade objetual manipulatória como aquela que guia os processos de desenvolvimento do psiquismo da criança de 1 a 3 anos. Nesse momento, nas ações compartilhadas e em colaboração com o adulto, a criança aprende como usar os objetos sociais, ao imitar as ações do outro sobre este, bem como identifica-los pelo nome.

Aproximadamente aos 3 anos, com o ingresso na idade pré-escolar, por meio da organização do seu entorno pelo adulto, é gerada a necessidade de a criança ser autônoma na realização de muitas tarefas cotidianas, sem a colaboração dos adultos. Nesse período, a atividade principal é o jogo de papéis que permite, à criança entre 4 e 5 anos – pelas brincadeiras de faz de conta – a reprodução das ações e tarefas realizadas pelos adultos, que manifesta o desejo de atuar como eles, sobre os objetos, nas diferentes relações humanas, como cabeleireiro/cliente, médico/paciente etc. Elkonin (1987) destaca que, embora deseja agir como um adulto, a criança ainda não domina as ações e as condições necessárias para tal. Ou melhor, ela pode brincar e reproduzir imaginariamente, por exemplo, de ser cozinheiro, mas, na realidade, não pode executar as ações reais, como: manusear o fogão, cortar alimentos, lidar com altas temperaturas das panelas, entre outras, por ainda ser criança e não dominar as formas mais elaboradas de se relacionar com diferentes fenômenos.

Por volta dos 7 anos, a criança ingressa nos anos iniciais do Ensino Fundamental e tem como atividade principal o estudo, “[...] cujo objetivo transcorre na assimilação de novos conhecimentos” (Elkonin, 1987, p. 119, tradução nossa). O ingresso na escola exige dela novas tarefas e rotinas, que até então não se faziam presentes em sua vida, pois sem a apropriação de novos conhecimentos, tornam-se impossíveis de serem executadas. A busca pela formação de abstrações e avanços no desenvolvimento psíquico, requer que a criança se coloque em atividade de estudo.

A atividade de estudo permite “[...] uma intensa formação das forças intelectuais e cognitivas da criança [...] porque por meio dela é mediado todo o sistema de relações da criança com os adultos que a cercam, inclusive a comunicação pessoal na família”

(Elkonin, 1987, p. 119, tradução nossa). Portanto, ao mediar as relações das crianças, na escola, a atividade de estudo possibilita que

[...] as crianças reproduzem não só os conhecimentos e competências correspondentes aos fundamentos das formas de consciência social [...], mas também as capacidades, historicamente emergidas, que estão na base da consciência teórica e do pensamento: reflexão, análise, experiência mental. Em outras palavras, o conteúdo da atividade de estudo é o conhecimento teórico (Davióv, 1988, p. 158, tradução nossa).

Portanto, Daviódov (1982) afirma que, diante dos conhecimento científicos, os alunos reproduzem o processo de criação dos conceitos, valores, imagens e normas, ao compreender o processo histórico de gerações.

Aproximadamente entre 10 a 14 anos, a atividade principal que marca esse período é a comunicação íntima pessoal. O adolescente estabelece relação com outros companheiros. De acordo com Elkonin (1987), por meio dessa comunicação pessoal, ele forma seus pontos de vista sobre a vida. Até os 17 anos aproximadamente, a atividade principal dos adolescentes muda à medida que inicia a puberdade e há alterações expressivas no papel do jovem na relação com o adulto e com suas forças físicas. A atividade principal é a profissional/estudo, em que o adolescente/jovem começa a se inserir no mundo do trabalho e busca compreender os problemas sociais, ao formar a autoconsciência e os pontos de vista gerais sobre os diferentes fenômenos do mundo.

Cabe ressaltar que essas transições e alterações - ocorridas na vida psíquica da criança – são variadas e asseguram o movimento de contradição, superação e continuidade na constituição humana. Com base em Elkonin (1987, p. 122, tradução nossa), ao pensarmos nas atividades, importa considerar que “[...] seu surgimento e conversão em atividade principal não eliminam as existentes anteriormente, senão que só mudam o seu lugar no sistema geral de relações da criança com a realidade, as quais se tornam mais ricas”. Isso evidencia a característica da historicidade ao desenvolvimento.

Com a teoria da periodização, Elkonin (1987) traz como premissa que o desenvolvimento do psiquismo aponta a necessidade da interação com o adulto e a sociedade para a humanização dos indivíduos. Para Pasqualini (2016, p. 68), ao se constatar a natureza histórico-social do psiquismo, reconhecemos que “a categoria-chave para a explicação do problema dos períodos do desenvolvimento é a atividade”.

Nesse movimento, é necessário a organização sistemática e intencional do ensino escolar, como condição para os alunos se apropriem dos conhecimentos científicos. O ensino deve, assim, “orientar-se, sobretudo, para a solução desse objetivo tão importante da escola moderna: formar nos mais novos uma atitude criativa em relação à atividade de estudo” (Daviđov, 1988, p.191, tradução nossa).

Diante dessas considerações, os conhecimentos científicos precisam ser organizados didaticamente para promover o desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos, dentre os quais destacamos, nesta dissertação, os matemáticos. Temos como pressuposto que, muito além de ser um conteúdo ou disciplina a ser ensinada na escola, a matemática é uma linguagem, produzida pelos homens ao longo dos anos, capaz de assegurar a satisfação de necessidades integrativas presentes na sociedade. Reconhecer a matemática como uma linguagem humana e histórica é essencial.

Portanto, ao pensamos na matemática, temos inúmeras situações com as quais, mesmo antes de ingressar na escola, nos deparamos no dia a dia, por exemplo, uma pessoa: comemora seu aniversário, ao brincar de construir coisas com peças de diferentes formas e tamanhos, medir as alturas, dividir a quantidade de um alimento entre pessoas, brincar de faz de conta de cozinhar ao comparar com os pesos e medidas, fazer compras para descobrir o valor dos produtos com seus respectivos pesos e quantidades, etc. Isso mostra que a criança tem contato com ideias matemáticas em suas relações com outros indivíduos e com o meio, antes de seu ingresso na escola. Porém, o conhecimento adquirido fora da escola é insuficiente para a vida em sociedade, pois se limita à compreensão dos fenômenos e objetos; à observação direta, perceptiva e concreta. Estas são características do pensamento empírico, as quais permite à criança solucionar seus problemas, ao observar

as características externas e no que diz respeito à sua identificação. A esfera dos processos mentais é limitada aqui: 1) à comparação de dados sensoriais concretos, a fim de destacar pistas formalmente gerais e estabelecer classificação, e 2) à identificação de objetos sensoriais concretos com o objetivo de incluí-los em uma classe ou outro (Daviđov, 1982, p. 76-77, tradução nossa).

Desse modo, o pensamento empírico permite, à criança, estabelecer relações externas e observações dos objetos por meio dos fenômenos singulares e sensoriais de suas características físicas estudadas. Isso não caracteriza, contudo, o pensamento empírico como sem importância. Afinal, “o fundamento e a fonte de todos

os conhecimentos do homem sobre a realidade são as sensações e percepções, dados sensoriais” (Davídov, 1988, p. 124, tradução nossa). Isso vale tanto para o conhecimento empírico como para o teórico, o que transcende para as respectivas formas de pensamento.

Embora essencial, o pensamento empírico tem suas limitações, pois a apreensão dos fatos e objetos ocorre com base nos dados aparentes do conhecimento. Portanto, é indispensável que os alunos não se limitem a este pensamento ao ingressar na escola, pois o objetivo da escola deve ser

Fornecer, às crianças, conceitos genuinamente científicos, desenvolver neles pensamento científico e capacidades para o domínio independente sucessivo do número sempre ascendente de novos conhecimentos científicos (Davídov, 1982, p. 111, tradução nossa).

Diante disso, o trabalho educativo deve pensar a organização do ensino de forma intencional e planejada para assegurar a compreensão da essência do conhecimento e a superação da lógica empírica do ensino tradicional para promover a formação do pensamento teórico. Para Davídov (1982, p. 308, tradução nossa), o pensamento teórico se caracteriza por

reunir coisas díspares, diferentes, multifacetadas, não coincidentes em um todo e mostrar seu peso específico nesse todo único. Consequentemente, como conteúdo específico do conceito teórico, aparece a conexão objetiva do geral e do singular (do todo e do diferente).

Isso não significa que o professor deva desconsiderar o pensamento empírico, pois conhecer e observar as características externas do conceito é essencial, também. Todavia, na escola, é indispensável ir além da aparência conceitual, isto é, compreender o conceito por meio de sua generalização, da relação entre o singular e o universal, o que caracteriza a formação do pensamento teórico. Para Davídov (1982, p. 361, tradução nossa), o pensamento teórico aparece nas transformações “[...] dos objetos, reflete suas relações e vínculos internos. Ao reproduzir o objeto na forma de conexão teórica, o pensamento vai além das estruturas das representações sensoriais”.

Portanto, Davídov (1982) afirma que, diante dos conhecimentos científicos, na escola é preciso desenvolver o pensamento teórico por meio de duas formas principais: 1. Pela análise dos fatos e generalização, em busca de compreender sua

essência (célula); 2. Ascensão da essência de forma abstrata para o concreto, para desenvolver uma síntese. Desse modo, sua tarefa consiste em “elaborar os dados de contemplação e representação em forma de conceito, e assim reproduzir em todas as suas facetas o sistema de conexões internas que geram a entidade concreta dada e revelam sua essência (Davýdov, 1982, p. 332, tradução nossa).

Á vista disso, na escola, em a busca de ir além do pensamento empírico e formar generalizações e abstrações teóricas, é necessário explorar, nas ações de ensino, a apropriação da linguagem, que

[...] transformou-se em elemento decisivo do conhecimento humano, graças ao qual o homem pode superar os limites da experiência sensorial, individualizar as características dos fenômenos, formular determinadas generalizações ou categorias. Pode-se dizer que sem o trabalho e a linguagem, no homem não se teria formado o pensamento abstrato “categorial” (Luria, 1987, p. 22).

Portanto, a linguagem auxilia na superação das relações sensoriais e permite, ao indivíduo: analisar, comunicar, assimilar, transmitir experiências, abstrair e generalizar os conhecimentos adquiridos historicamente. De acordo com Vygotsky (1996, p. 71, tradução nossa), “a linguagem é um meio poderoso de analisar e classificar fenômenos, de regular e generalizar a realidade”.

Desse modo, como uma função psicológica superior, a linguagem não se origina naturalmente no homem, mas é desenvolvida de forma consciente e intencional por meio das relações que ele estabelece com o meio e a sociedade. A fim de se apropriar e compreender os conceitos produzidos no processo histórico,

os processos de desenvolvimento da linguagem e do pensamento verbal reelaboram de maneira muito complexa a percepção visual direta da criança, para estruturá-la em uma nova base; durante a idade de transição, em particular, junto com a formação de conceitos, as velhas proporções, a velha correlação de visual-direto e não-visual-indireto, mudam os momentos concretos e abstratos na esfera da percepção (Vygotsky, 1996, p. 121, tradução nossa).

Desse modo, a linguagem e o pensamento contribuem com o processo de formação dos conceitos, conseqüentemente, auxilia na abstração e generalização do conhecimento elaborado historicamente. Nesse sentido, a linguagem

participa da formação de uma série sucessiva de sistemas que abarcam a atitude da personalidade em relação à natureza. [...] Para compreender sua própria dinâmica espiritual, para entender suas próprias percepções externas, o indivíduo deve objetivar cada uma

delas em palavras e relacioná-las com outras palavras. Para entender a natureza externa e a própria é importante saber como vemos essa natureza, por meio das comparações seus vários elementos se tornam perceptíveis à mente [...] A linguagem é inseparável da compreensão. A indivisibilidade entre linguagem e compreensão se manifesta tanto no uso social da linguagem como meio de comunicação quanto em seu uso individual como meio de pensamento (Vygotksy, 1996, p. 73, tradução nossa).

Portanto, na formação do pensamento teórico, a linguagem assume um papel essencial, pois, como um complexo sistema de códigos, Luria (1987, p. 25) explica que ela tem “a função de codificar e transmitir a informação, introduzi-la em determinados sistemas”. Essa função psicológica superior pode ser materializada por palavras, gestos, escrita, desenhos, teatro, etc. Isso permite, ao homem, expressar-se, apropriar-se da cultura e se desenvolver do ponto de vista individual e social (VYGOTSKY, 1996). As muitas formas de linguagem buscam assegurar a comunicação, a assimilação e a transmissão do conhecimento produzido historicamente. A matemática pode ser considerada uma delas.

Como uma linguagem, a matemática surge diante da necessidade humana “[...] resultante dos primeiros esforços do homem para sistematizar os conceitos de grandeza, forma e número” (Eves, 2011, p. 25), para integração e sobrevivência do homem. Moura (2007) justifica que a matemática é uma linguagem, pelo fato de ser um conjunto de signos, que auxilia o ser humano a estabelecer relações quantitativas, qualitativas e a satisfazer necessidades instrumentais e integrativas⁷ (controle de quantidades, grandezas, medidas e espaço), necessárias à solução de problemas. Moura (2007, p. 49) afirma: “[...] a linguagem matemática desenvolve-se e participa do desenvolvimento de ferramentas para atender à ampliação da capacidade humana para manter-se vivo e confortável. A matemática atende, assim, a um objetivo coletivo”. Desse modo, essa ciência é um

[...] instrumento que capacita o homem para satisfazer a necessidade de relacionar-se para resolver problemas, em que os conhecimentos produzidos a partir dos problemas colocados pela relação estabelecida entre os homens e com a natureza [...] (Moura, 2007, p. 48).

Portanto, é indispensável a apropriação da linguagem matemática, na escola, como um conhecimento científico, que permite a satisfação instrumental e integrativa

⁷ São aquelas que auxiliam o homem a estabelecer interação com o mundo e, para isso, utiliza-se de instrumentos como a geometria, a álgebra e a aritmética para estabelecer a integração.

dos sujeitos. Mas, como assegurar tal apropriação? Quando defendemos que o objetivo da escola é ensinar intencionalmente os conhecimentos científicos aos alunos - a fim de desenvolver neles o pensamento teórico -, na matemática, nos referimos ao que, como e o por que ensinar e, por isso, requer uma boa definição, tanto nos currículos oficiais, que norteiam a organização do trabalho escolar e , mais diretamente no trabalho docente.

Todavia, Davýdov (1982) alerta que, historicamente, o ensino tem por finalidade o desenvolvimento do pensamento empírico, cujo processo de generalização do conceito ocorre por meio do esquema percepção-representação-conceito. A aprendizagem dos alunos é pautada na observação sensorial dos objetos e fenômenos estudados.

Gradualmente, as crianças adquirem a faculdade, por um lado, de fazer a descrição oral dos objetos com base em impressões prévias, apoiando-se em representações visuais, auditivas e tátil-motoras; e, por outro, seguindo a narração verbal e as instruções do professor, elaborar as representações ilustrativas apropriadas de objetos com os quais não tiveram relação direta (Davýdov, 1982, p. 22, tradução nossa).

Assim, pautado no esquema percepção-representação-conceito, o aluno compreende a matemática, primeiramente, por meio da organização singular e pode representar visualmente, com marcas pictóricas, dedos etc. Por consequência, o aluno compreenderá o conceito limitado à observação direta, com base na repetição e na memorização, cuja referência são os dados aparentes, o que reduz a aprendizagem somente ao pensamento empírico.

Todavia, como afirmado anteriormente, para a Teoria Histórico-Cultural concebe, como finalidade do ensino, o desenvolvimento das funções psicológicas superiores, isto é, explorar as possibilidades para além dos dados aparentes e da observação direta. Por isso, a compreensão da matemática, de seus procedimentos e seus símbolos postula por ressignificações, que buscam a generalização do conceito em direção à formação do pensamento teórico dos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Com base nisso, Davýdov (1982) propõe a formação do pensamento teórico, pautada na organização do ensino sistematizada no esquema abstração-generalização-conceito. Deste modo, há de ocorrer, primeiramente, a análise do conceito estudado, que parte do concreto caótico, da relação direta que se tem com o

objeto. Gradativamente, advirá o movimento do pensamento de redução desse concreto para o abstrato, isto é, o objeto passa a ser visto por representações, as quais possibilitam a compreensão do movimento interno do conceito.

Nesse processo, deve-se voltar ao objeto estudado por meio de uma relação direta em movimento do pensamento de ascensão do abstrato ao concreto pensado, que promove a generalização teórica do conceito. Ao entender essa relação, é possível a resolução de outras tarefas com o mesmo modo de ação do conceito, o que indica a formação do pensamento teórico.

Essa organização proposta permite a compreensão da essência da linguagem matemática. De acordo com Davídov (1982, p. 346, tradução nossa), é a “conexão interna que, como manancial único e como base genética, determina todas as demais peculiaridades particulares do todo”. Desse modo, ao compreender o geral do objeto estudado, é possível generalizá-lo para outras tarefas particulares. Porém, o autor reitera que as tarefas de estudos e as ações com suas respectivas tarefas particulares e operações sejam estabelecidas de modo que coloque o aluno em atividade de estudo. Para o autor, a

[...] atividade de estudo dos escolares estrutura-se, a nosso ver, em correspondência com o procedimento de exposição do conhecimento científico, com o procedimento de ascensão do abstrato ao concreto. O pensamento dos alunos, no processo da atividade de estudo, tem algo em comum com o pensamento dos cientistas, que expõem os resultados de suas investigações por meio das abstrações e generalizações substantivas e dos conceitos teóricos que funcionam no processo de ascensão do abstrato ao concreto (Davídov, 1988, p. 173, tradução nossa).

A fim de mobilizar os alunos a estarem em atividade de estudo, na resolução de tarefas, Davídov (1988) propõe seis ações de estudos que possibilitam a formação do pensamento teórico. São elas:

- transformação de dados de tarefas para expor a relação universal do objeto estudado;
 - modelagem da relação diferenciada objetiva, graficamente ou por meio de letras;
 - transformação do modelo de relacionamento para estudar suas propriedades em "forma pura";
 - construção do sistema de tarefas particulares a resolver por um procedimento geral;
 - controle sobre o cumprimento das ações anteriores;
 - avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de estudo
- (Davídov, 1988, p. 181, tradução nossa).

Assim, diante de um problema proposto, os alunos realizarão a ação de identificar a relação geral do conceito estudado, bem como compreendê-lo. Por conseguinte, farão a modelação das relações que identificaram, primeiramente, de forma concreta objetiva e, depois, na forma gráfica – em que pode ser utilizada a reta numérica – e, por último, a literal, que compreende a gênese do conceito e a relação universal do objeto estudado.

Na terceira ação, os alunos estudarão as propriedades gerais, a fim de transformar o modelo da relação essencial, para que possam realizar um conjunto de tarefas particulares, de modo a destacar as propriedades gerais do conceito (quarta ação). Ao longo do desenvolvimento dessas quatro ações, concomitantemente, ocorre a quinta e a sexta ação, que consistem, respectivamente, no controle de todas as ações para generalizar o conceito e na avaliação da aprendizagem dos alunos, diante da tarefa de estudo.

O conjunto dessas ações tem o objetivo de possibilitar a formação de abstrações e generalizações, na direção do desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos. Portanto, a fim de desenvolver as ações de estudo, Davidov (1988, p. 180, tradução nossa) propõe uma série de tarefas particulares a fim de estimular “[...] o pensamento dos escolares no sentido de explicar o que ainda não se sabe, de assimilar novos conceitos e procedimentos de ação [...]”.

As ações de estudo buscam a resolução das tarefas propostas por Davidov (1988) para o ensino da matemática nos anos iniciais de escolarização, voltadas à compreensão do conceito de número na relação entre grandezas. Portanto, as tarefas de estudo são as seguintes:

- Introdução dos alunos à esfera das relações entre grandezas: formação do conceito abstrato de grandeza matemática;
- demonstração às crianças da relação múltipla de grandezas como forma geral de número: formação do conceito abstrato de número e compreensão da inter-relação fundamental entre seus componentes (o número é derivado da relação múltipla das grandezas);
- introdução sucessiva dos escolares na área dos diferentes tipos particulares de números (naturais, quebrados, negativos): formação de conceitos sobre esses números como uma das manifestações da relação múltipla geral de suas grandezas em determinadas condições concretas;
- demonstração aos alunos da natureza unívoca da estrutura da operação matemática (se o valor de dois elementos da operação for conhecido, o valor do terceiro elemento pode ser determinado univocamente): formação da compreensão da inter-relação dos

elementos em ações aritméticas fundamentais (Daviđov, 1988, p. 209, tradução nossa).

As tarefas de estudos propostas devem ser colocadas em movimento pelo professor nos anos iniciais do Ensino Fundamental, por meio das tarefas particulares. Estas precisam ser cumpridas pelos alunos diante das seis ações de estudo, com o intuito de possibilitar que eles se coloquem em atividade de estudo.

Damazio *et al.* (2012), com o objetivo de apresentar as ações de estudos, tarefas de estudos e particulares desenvolvidas pelos alunos, em interação com o professor, exemplificaram a questão com a história virtual do “Verdim e seus amigos”, inicialmente elaborada por Lanner de Moura (1995), que apresentamos a seguir.

Quadro 2 - História virtual do “Verdim e seus amigos”

Verdim e seus amigos

Era uma vez Verdim, um ser encantado que vivia em uma floresta de outro mundo. Verdim tinha muitos amigos, e juntos brincavam, todos os dias, na clareira dessa floresta. Quase todos viviam próximos à casa de Verdim, menos três deles: o gigante, chamado Tililim, e os dois anões, Edim e Enim.

Certo dia, Verdim convidou a todos para brincarem em sua casa. Como Tililim, Edim e Enim moravam muito longe, Verdim explicou como chegar até lá. Assim, saindo da clareira, do lado que o sol se põe, deveriam dar cinquenta passos para frente, depois trinta passos à direita e mais quarenta passos até a grande árvore e, então, continuariam em frente, e a casa de Verdim estaria a apenas dez passos dali.

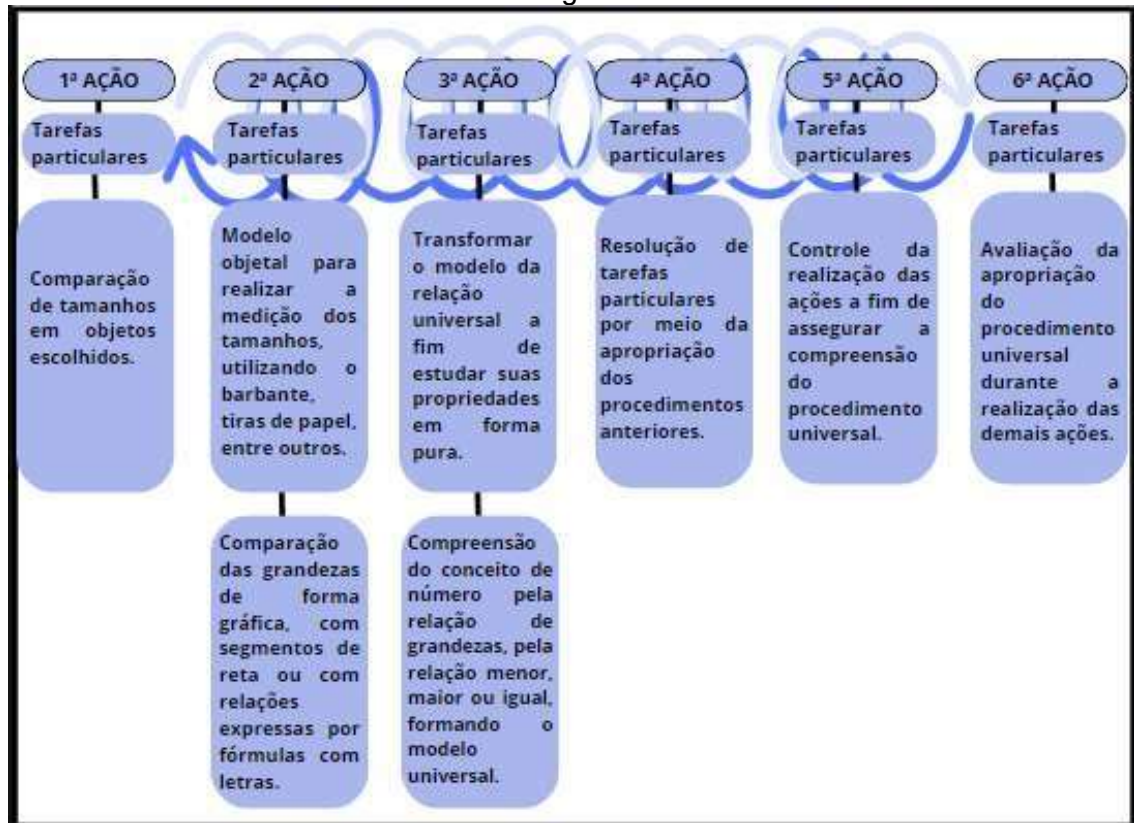
Com a explicação de Verdim, os três amigos anotaram todas as orientações para não esquecerem nada.

No dia seguinte, logo pela manhã, seguiram na direção indicada. Mas, apesar disso, não conseguiram chegar à casa de Verdim. O que pode ter acontecido? Por que eles não chegaram? Como ajudar Verdim a entender o que aconteceu para buscar outro modo de explicar como chegar até sua casa?

Fonte: Damazio *et al.* (2012, p.160-161).

A fim de compreender o desenvolvimento das ações de estudo, tarefas de estudo e particulares propostas por Daviđov (1988) por meio de uma história virtual, sistematizamos, no Organograma 1, as ações e as tarefas particulares identificadas por Rosa e Damazio (2017).

Organograma 1 - Ações de estudos com base na história virtual “Verdim e seus amigos”



Fonte: da autora (2024).

Ao analisar o organograma, podemos constatar que, por meio de tarefas particulares, os alunos realizarão as ações de estudo em um movimento dialético, até chegar à solução, a fim de cumprir a primeira tarefa de estudo de Davidov (1988) para entender o número por meio da comparação entre grandezas. Isso revela que os alunos se mantêm em atividade de estudo, com a intenção de compreender a relação universal do conceito estudado. Por isso, na primeira ação, a fim de resolver a Situação Desencadeadora de Aprendizagem proposta, os alunos estabelecerão comparações dos personagens, tendo disponíveis, barbantes, tiras de papéis etc., para compreender as “relações de igualdade e desigualdade entre grandezas: igual, maior ou menor” (Rosa; Damazio, 2017, p. 161).

Desse modo, as ações se entrelaçam em um movimento em espiral, ou seja, de forma dialética, o que possibilita a segunda ação de estudo, na qual os alunos elaboram modelos – na forma objetal, gráfica e literal – para representar uma relação universal. Rosa e Damazio (2017, p. 166) demonstram que “ $x > y$ (o comprimento do passo de Tililim é maior que o comprimento do passo de Verdim), $z < y$ (z é menor que y) e $w < y$ (w é menor que y)”. Essas comparações literais permitem a “reprodução

abstrata das relações entre grandezas concretamente dadas, por meio dos passos dos personagens” (Rosa; Damazio, 2017, p. 167). Desse modo, os alunos poderão chegar em um modelo universal: $w/y = 1/2$, $w = (1/2)y$ ou $2w = y$, em que x representa o passo de Verdim, w e z , os passos dos anões Edim e Enim e y , o passo de Tililim, o gigante. Esse modelo mediado pela unidade de medida, nas intervenções docente, permite que os alunos compreendam a essência do conceito estudado, isto é, a relação de multiplicidade e divisibilidade entre as grandezas em sua expressão singular, expressa pelos números naturais, inteiros, racionais e irracionais.

Por conseguinte, na terceira ação, os alunos compreenderão o conceito de número, pelas grandezas “discreto (cada passo) e o contínuo (comprimento que representa o todo a ser percorrido pelos convidados de Verdim)” (Rosa; Damazio, 2017, p. 172). Com base nisso, o conceito de número é entendido pela relação de grandezas, pela relação menor, maior ou igual, ao formar o modelo universal.

Nesse processo de formar o conceito de número, é possível identificar o movimento entre geral, particular, universal e singular, proposto por Davýdov (1982) pelas inter-relações entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas. Podemos reconhecer essas três significações no processo de resolução da história virtual, à medida que “o processo de aplicar a unidade de medida sobre a grandeza a ser medida é de caráter geométrico. A quantidade de vezes que a unidade cabe na grandeza traduz o teor aritmético, que surge a partir da relação algébrica entre grandezas (modelo)” (Rosa; Damazio, 2017, p. 172).

Ao compreender o procedimento universal do conceito estudado, isto é, das relações entre grandezas, a resolução de tarefas particulares torna-se possível por meio do “procedimento único, apropriado durante a realização das ações anteriores” (Rosa; Damazio, 2017, p. 173). Ao resolver a tarefa proposta, ocorre o controle da realização das ações capazes de “assegurar que o procedimento universal da ação tenha todas as operações indispensáveis para que o estudante resolva, exitosamente, a diversidade de tarefas concretas particulares” (Rosa; Damazio, 2017, p. 176). Há, também, a avaliação da apropriação do procedimento universal, que pode ser vista durante a realização das demais ações e possibilitará a compreensão ou não do conceito de número pela relação entre as grandezas.

Ao analisarmos a história virtual do “Verdim e seus amigos” e as ações de estudos de Davýdov (1988), constatamos a possibilidade de, ao explorá-la com base nos princípios apontados, auxiliar na organização intencional do ensino e da

aprendizagem no espaço escolar. Esse processo ocorre de modo tal que promove o desenvolvimento de abstrações e generalizações teóricas com a linguagem matemática.

Isso evidencia que as tarefas de estudos e particulares precisam ser bem elaboradas e sistematizadas, pois não é somente uma ação isolada que possibilitará este desenvolvimento. Requisita, pois, pensar em toda a organização do ensino, para que a escola garanta a todos a apropriação dos conhecimentos científicos. Nessa busca por pensar essa organização, Moura (1996) propõe uma base teórico-metodológica denominada de Atividade Orientadora de Ensino. De acordo com Moura *et al.* (2016, p. 110),

A AOE mantém a estrutura de atividade proposta por Leontiev, ao indicar uma necessidade (apropriação da cultura), um motivo real (apropriação do conhecimento historicamente acumulado), objetivos (ensinar e aprender) e propor ações que considerem as condições objetivas da instituição escolar.

A Atividade Orientadora de Ensino defende que o professor esteja em atividade de ensino e o aluno em atividade de aprendizagem, ao mesmo tempo. Por consequência, possibilitará que o professor, ao formar o aluno, também se forme. Ao estar em atividade de aprendizagem, o professor poderá refletir sobre as ações de ensino, a fim de propiciar a criação das condições adequadas para que os alunos também estejam em atividade. As atividades de ensino e aprendizagem e ensino ocorrem por meio da:

- Formação do estudante, que, ao ser sujeito na atividade de aprendizagem, se apropria do conhecimento teórico, desenvolvendo-se transformando-se; humanizando-se, no movimento de análise e síntese inerente ao processo de solução do problema de aprendizagem da AOE.
- Formação do professor, que tem por objetivo ensinar o estudante e que, entretanto, nas discussões coletivas, no movimento dos motivos de sua atividade, das ações, operações e reflexões que realiza, aprende a ser professor aproximando o sentido pessoal de suas ações da significação da atividade pedagógica como concretizadora de um objetivo social (Moura *et al.*, 2016, p. 108).

Ao adotar a Atividade Orientadora de Ensino como modo geral de organização da atividade pedagógica, o professor terá elementos para pensar e elaborar estratégias e instrumentos voltados à sua prática pedagógica com o objetivo de aproximar os alunos do objeto estudado (Moura, 1997). A Atividade Orientadora de

Ensino objetiva organizar o ensino a fim de possibilitar, aos alunos, a apropriação dos conhecimentos científicos. De acordo com Cedro, Moretti e Moraes (2019, p. 433 - 434),

a origem do conceito AOE reside na organização do ensino. Mas, que ensino? O ensino que dê condições para os sujeitos apropriarem-se dos conhecimentos científicos e desenvolverem suas capacidades intelectivas. Neste momento de produção do conceito, a atividade orientadora se materializava em ações e instrumentos que o professor poderia utilizar para o desenvolvimento do ensino de determinado conteúdo escolar. Inclusive, no processo inicial de consolidação da atividade orientadora ela foi compreendida, por alguns, como o “problema desencadeador da aprendizagem”. Contudo, é importante considerar que em seu germe já trazia uma estrutura que ia além desses elementos, revelava a direção mais generalizada para organização do ensino, visto que contemplava a tríade essencial da atividade pedagógica: conteúdo a ser ensinado, a forma mais adequada e os sujeitos aprendizes.

Portanto, a Atividade Orientadora de Ensino busca materializar a tríade sujeito, conteúdo e forma no planejamento educativo “com ações de ensino humanizadoras (desenvolvedoras do gênero humano), mediadas pelos instrumentos e signos internalizados pelo professor, no movimento da atividade pedagógica” (Ferro, 2023, p. 64).

O professor, ao se colocar em atividade de ensino, deve considerar a dialeticidade e a unidade da tríade entre sujeito ou destinatário, conteúdo e forma, para organizar seu trabalho (Martins, 2011). Cabe ao docente, ao planejar suas ações, pensar sobre quem será o sujeito a quem irá ensinar e sua atividade principal (comunicação emocional direta, objeto manipulatória, jogos de papéis, atividade de estudo etc.). Além do sujeito, é preciso pensar sobre o conteúdo a ser ensinado, reconhecer o movimento lógico-histórico e as necessidades que os tornaram necessários. Considerar, também, a forma adequada de se ensinar, ou melhor, os procedimentos e os encaminhamentos metodológicos eficazes para potencializar a aprendizagem e o desenvolvimento.

Tendo essa tríade em mente, diante dos princípios teórico-metodológicos da Atividade Orientadora de Ensino (Moura *et al.*, 2016), as Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA) se apresentam como proposta capaz de instrumentalizar o professor para organizar o ensino na direção da formação humana.

As Situações Desencadeadoras de Aprendizagem orientam as ações do professor, a fim de mobilizar os alunos a estarem em atividade de estudo. Com isso,

as SDA's propostas podem colocar "em movimento os conhecimentos já apreendidos - base para a produção de uma nova síntese - e, desse modo, permitir a apropriação de um novo conceito ou o seu aprofundamento" (Moura, 2023, p. 26).

Para isso, a SDA deve contemplar a síntese histórica do conceito e recriar a necessidade de seu desenvolvimento produzido historicamente. Nesse movimento, o professor apresenta um problema desencadeador semelhante ao que os humanos vivenciaram, na busca de mobilizar os alunos a resolvê-lo (Moura *et al.*, 2016). Desse modo, a elaboração da Situação Desencadeadora de Aprendizagem objetiva possibilitar que os alunos sejam colocados em atividade de aprendizagem, ao elaborar soluções para o problema por meio de uma síntese coletiva. Além disso, auxilia os alunos a estarem em tensão criativa, a fim de refletirem sobre o conceito, de forma que os leve a estudá-lo e compreendê-lo tendo como referência a necessidade de sua criação (Moura *et al.*, 2016).

A Situação Desencadeadora de Aprendizagem pode ser materializada por meio dos recursos metodológicos⁸: história virtual do conceito, situação emergente do cotidiano e jogos. A história virtual apresenta, por meio de um personagem fictício, um problema desencadeador para que, de forma coletiva, os alunos busquem soluções para uma situação semelhante a que o homem enfrentou na história (Moura *et al.*, 2016). Pelas situações emergentes do cotidiano, o aluno é colocado diante de uma situação de seu cotidiano, ao possibilitar interrogações com o intuito de resolvê-la. Por fim, o jogo, um recurso didático lúdico que, ao ser problematizado, auxilia o aluno a elaborar estratégias e soluções a um problema proposto (Moura *et al.*, 2016).

Essas formas de materializar a Situação Desencadeadora de Aprendizagem consideram a dimensão lógico-histórica do conceito estudado, por mostrar a necessidade que levou o homem a criar o conhecimento. Além disso, geram uma tensão criativa que coloca os alunos em atividade de aprendizagem. Esse movimento possibilita a

apropriação de conhecimentos considerados relevantes do ponto de vista social, para que o sujeito esteja munido com ferramentas teóricas, metodológicas e éticas que lhe proporcionem a participação de modo pleno na comunidade à qual pertence (Moura; Araújo; Serrão, 2019, p. 423).

⁸ De acordo com Moura *et al.* (2010, p. 223-224), "As situações desencadeadoras de aprendizagem podem ser materializadas por meio de diferentes recursos metodológicos. Dentre esses recursos, Moura e Lanner de Moura (1998) destacaram o jogo, as situações emergentes do cotidiano e o que chamam de história virtual do conceito".

Observa-se, pois, que a Situação Desencadeadora de Aprendizagem auxilia na organização do ensino da matemática e proporciona um “bom ensino”, considerado por Vygotsky (1996) como aquele que promove o desenvolvimento psíquico dos alunos. Portanto, a fim de pensar na organização do ensino dessa linguagem, é necessário reconhecer os conceitos aritméticos, geométricos e algébricos, integradores da matemática. Assim, de acordo com Eves (2011), pode-se reconhecê-la como uma ciência composta pelas formas, pelos números e pelas grandezas que, juntos, “expressam a síntese histórica e as formas pelas quais o homem se apropria do conceito de número” (Rosa, 2012, p. 31).

Desse modo, ao pensarmos sobre o ensino da matemática, Davýdov (1982) e Davídov (1988) trazem a proposta de inter-relacionar as significações matemáticas, a fim de promover a formação omnilateral do aluno. Contudo, o desenvolvimento das significações matemáticas, no processo escolar, requer o reconhecimento das especificidades de cada uma delas de modo a aproximar o diálogo entre a essência dos conceitos.

A seguir, apresentamos como a aritmética, a álgebra e a geometria, concebidas como significações matemáticas, podem ser relacionadas na atividade pedagógica, em sala de aula.

4. A MATEMÁTICA E SUAS INTER-SIGNIFICAÇÕES

A matemática é considerada, para a Teoria Histórico-Cultural, uma linguagem produzida historicamente diante da necessidade de sobrevivência do homem, que não implica apenas em se alimentar, mas sim em interpretar, conhecer, transformar a sociedade, controlar quantidades e se comunicar. Portanto, ao longo do tempo, a matemática se constituiu e formou as suas significações para expressar a essência dos seus conceitos:

- Aritmética: estuda os números e operações numéricas (adição, subtração, multiplicação, divisão...);
- Algébrica: se relaciona à manipulação formal de operações matemáticas, de equações, relação entre grandeza e unidade;
- Geométrica: trabalha com as formas, tamanho, posição relativa de figuras e propriedade do espaço (comprimento, área...) (Gil; Lacanallo-Arrais, 2021, p. 80).

Na constituição dessa linguagem, Eves (2011, p. 462) afirma que “A aritmética, a álgebra, a geometria [...] servem de base para a matemática [...]”. A produção dos seus conceitos envolveu, assim, o controle de quantidades, medidas e grandezas. Portanto, o processo de constituição da matemática e de suas significações partiu de uma

[...] sucessão impecável de conceitos encadeados uns aos outros. [...] é a história das necessidades e preocupações de grupos sociais ao buscar recensear seus membros, seus bens, suas perdas, seus prisioneiros, ao procurar datar a fundação de suas cidades e de suas vitórias utilizando os meios disponíveis, às vezes empíricos [...] (Ifrah, 1997, p. 10).

Desse modo, na constituição da linguagem matemática, as significações se inter-relacionaram, desde sua origem. A ênfase inicial, de acordo com Eves (2011, p. 57),

[...] ocorreu na aritmética e na mensuração práticas. Uma arte especial começou a tomar corpo para o cultivo, aplicação e ensino dessa ciência prática. Nesse contexto, todavia, desenvolvem-se tendências no sentido da abstração e, até certo ponto, passou-se então a estudar a ciência por si mesma. Foi dessa maneira que a álgebra envolveu o fim da aritmética e a geometria teórica originou-se da mensuração.

Desse entendimento de constituição da matemática, Davýdov (1982) faz uma proposição de organização de ensino que inter-relaciona essas significações, pois são elas que mantêm “o sistema de nexos e relações que constitui os números reais como um todo indissolúvel em conexão com os naturais, inteiros, racionais e irracionais, ou seja, é o concreto do conceito, em sua integridade” (Rosa, 2012, p. 228).

Davýdov (1982) salienta a necessidade de compreender as significações por meio de seus nexos conceituais. Estes auxiliam o entendimento da relação e da ligação interna que compõem o conceito. De forma, porém, que reconheça “[...] a lógica, a história, as abstrações, as formalizações do pensar humano no processo de constituir-se humano pelo conhecimento” (Sousa, 2004, p. 61).

O conhecimento desses nexos seria uma estratégia para integrar as significações matemáticas, de forma a estabelecer relações entre os conceitos, ao pensar em possibilidades para organizar o ensino da linguagem matemática. Em busca desse conhecimento, passamos a caracterizar cada uma das significações matemáticas.

4.1. Aritmética

A aritmética tem como essência o estudo dos números e das suas operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão), além da potenciação, radiciação e logaritmação, como define Caraça (1951). Essa significação é definida como uma “[...] ciência das relações quantitativas reais consideradas abstratamente, isto é, simplesmente como relações. [...] Surge de uma longa experiência prática de muitas gerações” (Aleksandrov *et al.*, 1994, p. 27, tradução nossa), cujo objetivo é o sistema numérico, suas relações e suas regras.

Para Eves (2011), o conceito de número e o processo de contagem ocorreram com os primeiros esforços do homem para sistematizar as formas e as grandezas para satisfazer as suas necessidades de controlar certas quantidades, por exemplo. Para o autor, “[...] há evidências arqueológicas de que o homem, já há uns 50.000 anos, era capaz de contar [...]” (Eves, 2011, p. 25), ou seja, a contagem teria surgido bem antes dos primeiros registros históricos.

Ifrah (1997, p. 22-23) afirma que “[...] são inicialmente preocupações de contadores, mas também de sacerdotes, astrônomos-astrólogos e somente em último

lugar de matemáticos, que presidiram à invenção e à evolução dos sistemas de numeração”.

A matemática, pela sua história, formou-se ao longo do tempo, com base na necessidade de o homem explorar o mundo e sobreviver. Pela exploração da própria natureza, o indivíduo criou instrumentos que o auxiliaram a resolver situações do cotidiano, por exemplo, usar as pedras, os gravetos, os ossos, as cordas etc, para controlar quantidades. Desse modo, a contagem surgiu da

[...] história das necessidades e preocupações das culturas e grupos sociais os mais diversos, procurando contar os dias do ano, concluir trocas e transações, enumerar também seus membros, esposas, mortos, bens, rebanhos, soldados, perdas, mesmo seus cativos, procurando por vezes datar a fundação de suas cidades ou uma de suas vitórias. [...] Numa palavra, é a história de uma humanidade que, graças à inteligência de sua ação e reflexão e também pela força das coisas, foi conduzida a considerar tudo o que exige uma ‘avaliação numérica’. Meios que começaram sendo concretos, empíricos e tateantes antes de se tornar abstratos e aperfeiçoados e que foram concebidos inicialmente de uma maneira estranhamente mística e mitológica [...] (Ifrah, 1997, p. 17).

Por consequência de diferentes necessidades, o homem criou estratégias para controlar as grandezas ao seu redor. Além dos instrumentos explorados da natureza, partes do corpo e os dedos das mãos também foram empregados e, mesmo hoje, auxiliam na contagem para a realização desse controle.

Ela constitui uma espécie de “instrumento natural” particularmente designado para a aquisição dos dez primeiros números e o aprendizado da aritmética elementar [...] A mão do homem se apresenta, assim, como a “máquina de contar” mais simples e mais natural que existe (Ifrah, 1989, p. 50-51).

A criação dos números e da contagem é decorrente de um processo longo e diverso, influenciado por diferentes povos, estratégias e lógicas, mas consequente da mesma necessidade: assegurar o controle de quantidades.

[...] os números figuram entre os conceitos mais complexos e abstratos que a espécie humana encontrou a seu dispor. Essa invenção é, sem qualquer dúvida, uma das maiores conquistas da humanidade, para não dizer a maior. Assim, entre a linguagem, a escrita e a aritmética, foi esta última que exigiu mais tempo e esforço da humanidade para ser assimilada. Ao ponto que os povos ao longo das eras experimentaram um certo temor místico por ela, chegando frequentemente a identificar os números individualmente com forças e até mesmo com divindades e a inserir seu simbólico como um

elemento pretensamente essencial do nome e do indivíduo (Ifrah, 1997, p. 24).

O número, portanto, constitui-se ao longo dos anos diante das necessidades humanas de controlar as quantidades. Nesse sentido, Aleksandrov *et al.* (1994, p. 24, tradução nossa) afirmam que, a princípio, o homem não conhecia o número, mas julgava “o tamanho de um ou outro conjunto de objetos que encontravam diariamente”. O número era percebido de forma direta com uma coleção de objetos e, ao longo de gerações, essas comparações permitiram à humanidade descobrir os números e as relações entre eles. Por exemplo, uma coleção de cinco objetos ser equivalente ao número, cujo signo é 5 (Aleksandrov *et al.*, 1994).

Esse movimento estabeleceu a aritmética de maneira lenta e gradativa, diante das experiências vivenciadas pelos sujeitos ao longo de gerações. Desse modo, os conceitos aritméticos,

surgem por meio da abstração, como resultado da análise e generalização de uma imensa experiência prática. Eles aparecem gradualmente. Primeiro surgiram os números relacionados a objetos concretos, depois os números abstratos e por fim o conceito de número em geral, de qualquer número possível. Cada um desses conceitos surgiu de uma combinação de experiência prática e conceitos abstratos anteriores (Aleksandrov *et al.*, 1994, p. 35, tradução nossa).

Esses conceitos resultam de diversas abstrações e generalizações, produzidas com base na combinação de experiências e das necessidades práticas da vida social (Aleksandrov *et al.*, 1994). Portanto, a aritmética, como destaca o autor, é uma das maiores conquistas humanas e precisa ser assegurada às novas gerações.

Esse processo de apropriação da aritmética, porém, não acontece com o ingresso da criança nas escolas, pois, mesmo antes disso, ela tem contato com a aritmética, explorada pelas percepções visuais imediatas das quantidades. Nesta situação, a criança não utiliza de signos internos e externos como mediadores para o controle de quantidade, mas utiliza a percepção. Esse momento é denominado por Vygotsky (1931), de aritmética natural.

Na fase natural ou primitiva, a criança resolve a tarefa proposta diretamente. Resolvidas as tarefas mais simples, a criança passa para a fase de uso dos signos, sem ao menos ter consciência de como eles agem. Segue-se a fase de utilização dos signos externos e, por fim, a dos signos internos. [...] a criança a olho nu compara os valores apresentados (Vygotsky, 1931, p. 165, tradução nossa).

Na idade pré-escolar, ocorre a “[...] passagem da percepção direta da quantidade para a mediada, em que a criança começa a igualar as quantidades a certos signos e a operar com eles” (Vygotsky, 1931, p. 208, tradução nossa). Desse modo, estabelece relações e comparações empíricas, por via de meios externos auxiliares, como objetos diversos, para analisar as quantidades. Portanto, “[...] toda aritmética pré-escolar é, em grande medida, uma aritmética de percepção direta de quantidades, de operações diretas com elas” (Vygotsky, 1931, p. 211, tradução nossa).

Ao ingressar na escola, entretanto, a criança faz a transição da aritmética natural para a cultural, à medida que a relação entre a percepção da forma e da operação aritmética é modificada. Nesse momento, os alunos iniciam uma transição da aritmética mediada para a cultural, a fim de se apropriarem dos conceitos matemáticos como mediadores internos dos processos psíquicos.

[...] quando a criança entra na cultura, ela não só tira algo dela, não só assimila e se enriquece com o que está fora dela, mas a própria cultura retrabalha profundamente a composição natural de seu comportamento e dá uma orientação completamente nova para todo o curso de seu desenvolvimento (Vygotsky, 1931, p. 305, tradução nossa).

Desse modo, na escola – por meio de um trabalho sistemático, planejado e intencional –, o professor criará condições para que a criança compreenda a aritmética cultural, indo além da percepção direta, em direção a um novo processo de desenvolvimento e de compreensão do cálculo.

Nesse novo processo de cálculo, a criança reconhecerá o que envolve o número em si, ao compreender os nexos conceituais presentes. Sousa (2014) aponta como sendo estes nexos: a correspondência um a um, o valor posicional, o sistema de numeração decimal, o senso numérico, os agrupamentos e as representações, os quais só podem ser aprendidos de maneira sistematizada na escola.

Esses nexos, que constituem a aritmética, surgiram no decorrer do tempo. Em seu cotidiano, a fim de controlar uma quantidade, o homem comparava um grupo de elementos com outro, por exemplo, o grupo de ovelhas (conjunto contado) com o de pedras (conjunto que conta). Para isso, utilizava-se da correspondência um a um (biunívoca), que seria uma pedra para uma ovelha (Dias; Moretti, 2011). Assim, a compreensão desse nexo é necessária, pois permite “a comparação entre duas

coleções de modo que possamos afirmar se ambas têm o mesmo número de elementos ou qual é mais numerosa” (Dias; Moretti, 2011, p. 17).

A representação, como outro nexos conceitual do número, configura-se em diferentes estratégias para indicar a variação de quantidades, por exemplo, o entalhe na madeira ou em ossos. O agrupamento foi utilizado mesmo antes da contagem para o controle de quantidades, na sua representação, em que se fazia marcas por meio de grupos. Exemplo disso seriam os ossos, com os quais contava-se de cinco em cinco unidades (Dias; Moretti, 2011).

Nesse processo de constituição da aritmética, o sistema de numeração decimal - um dos sistemas existentes - foi construído no âmbito dos povos hindus-arábicos. Por esse sistema, o homem passou a contar os números pelas potências de base dez. Portanto,

A ideia primitiva de número [...] desenvolveu-se tendo como apoio o conceito de cardinalidade, ou seja, em um primeiro momento o número cardinal buscava apenas responder à quantidade de elementos de um determinado conjunto por meio da correspondência biunívoca. À medida que se desenvolveu a contagem e o conceito de sucessor, o número passa a representar não apenas a quantidade como também a indicar a ordem em uma sequência pré-definida de termos (Dias; Moretti, 2011, p. 32).

Em decorrência da base, outro nexos que caracteriza o número é o valor posicional. Assim, pela posição do número, pode-se saber a quantidade representada, por exemplo, quando temos o número 12, temos 1 (uma) dezena e 2 (duas) unidades. Porém, se invertermos a posição ao manter os mesmos algarismos, teremos 21, ou seja, 2 (duas) dezenas e 1 (uma) unidade.

Os nexos apresentados, com base em Sousa (2014, p. 72), seriam “o ponto de partida para o ensino das variações quantitativas e, conseqüentemente, para o ensino do conceito de número, na Educação Básica”. A apropriação dessa significação é essencial, pois permite o controle de quantidades e sua manipulação; portanto assegurar que todos os alunos possam apreender tais compreensões é função essencial da escola.

Além da aritmética, torna-se essencial entender as outras significações matemáticas, a fim de conhecer a essência dessa linguagem. A seguir, passamos a caracterizar a geometria, com o intuito de conhecer suas especificidades e pensar na organização do ensino como um todo.

4.2. Geometria

A geometria tem como essência o estudo das formas, dos tamanhos, dos espaços e das figuras, ao constituir-se, ao longo do tempo, como um conhecimento histórico e cultural. De acordo com Aleksandrov *et al.* (1994, p. 39, tradução nossa), a geometria surgiu ao longo de gerações por meio da natureza, tendo “origem nas atividades práticas e nos problemas da vida cotidiana”. Ao operar com os corpos e com as figuras geométricas, seu objeto de estudo são as formas e as relações espaciais dos corpos que foram e são abstraídas do mundo ao nosso redor. Ao longo da história, percebemos diversas situações geradoras da necessidade de compreensão da relação espacial e objetal, para assegurar a sobrevivência humana. Quando analisamos a trajetória histórica, constatamos que essas relações decorreram das necessidades de construção de moradias, divisão de terras, cobrança de impostos dos terrenos e de outras atividades práticas do homem.

A geometria foi descoberta pelos egípcios como resultado das medições das suas terras, e essas medições foram necessárias devido às cheias do Nilo, que apagavam constantemente as fronteiras [...], problemas de cálculo de capacidades de contêineres e armazéns, áreas de armazenamento, porções de terreno, dimensões de aterros, etc (Aleksandrov *et al.*, 1994, p. 39, tradução nossa).

Além das situações relatadas pelos autores, a geometria também surgiu da necessidade de construções de casas, celeiros, cercas para animais etc. Essas atividades realizadas pelo homem exigiram a aprimoração das

[...] técnicas de medir, pois fazê-lo significava delimitar e cobrir um espaço onde pudesse abrigar-se; levantar com pedras ou com sarrafos algo parecido com as cavernas que seus antepassados habitavam. O que se transformou certamente no desafio de controlar as variações de tamanho e de distância, de desenvolver, entre outras, técnicas para comparar e medir altura, comprimentos e superfícies (Lanner de Moura, 1995, p. 58).

De acordo com a autora, a construção de habitações contribui para a formação das noções geométricas, à medida que o homem precisou de instrumentos e saber como usá-los nessas construções, bem como selecionar as melhores e mais adequadas para construir e medir. Foi diante dessas situações e de outras necessidades que o homem precisou estabelecer relações espaciais.

O homem não copia meramente as formas da natureza, mesmo porque, nela não encontra a linha reta, ou o círculo perfeito, ela as recria mediante a ação, impulsionada pela necessidade de se suprir de instrumentos que lhe possibilitem superar os limites que lhes são próprios, por ser ele também natureza (Lanner de Moura; Moura, 2001, p. 2).

Com isso, ao estabelecer relações no mundo para assegurar sua sobrevivência, o homem produziu instrumentos para auxiliá-lo a estabelecer relações espaciais, que o permitissem medir, criar moradias, localizar-se e calcular distâncias. Por meio dessas relações, a geometria se fez presente na sociedade. De acordo com Eves (2011), o homem passou a reconhecer as configurações físicas, comparar tamanhos e formas, sendo essencial o domínio desses conhecimentos.

[...] na origem de problemas geométricos concretos, com os quais o homem se envolve desde suas primitivas atividades práticas, está a necessidade de controlar as variações de dimensões com as quais se defronta ao delimitar seu espaço físico para morar e produzir (Lanner de Moura, 1995, p. 54).

Portanto, na busca de soluções para seus problemas cotidianos, as representações foram sendo consolidadas (Lanner de Moura, 1995). Nesse processo de buscar formas para medir e estabelecer relações espaciais, a geometria se constituiu, ao longo do tempo, por quatro momentos: a geometria sensorial, prática, formal e a científica (Moura *et al.*, 2018).

Ao considerarmos a geometria sensorial, a referência são as percepções geométricas presentes na vida do homem, ao observar o meio que o rodeia. Portanto, surge “[...] de simples observações provenientes da capacidade humana de reconhecer configurações físicas e comparar formas e tamanhos [...]” (Eves, 2011, p. 693). As observações auxiliam o homem a compreender que o espaço é composto por objetos com formas diferentes e com diversas relações. Por decorrência, dentre os conceitos geométricos que se constituíram, temos as noções de simetria e de localização. Foi “por meio da utilização dos sentidos que o homem primitivo veio a desenvolver o que denominamos por geometria sensorial” (Moura *et al.*, 2018, p. 8).

Ao longo do tempo, o surgimento da geometria prática se fez presente para controlar o espaço, por exemplo, na delimitação das terras, o que auxiliou na construção de figuras geométricas como o quadrado e o retângulo, à medida que o homem precisou dividir terras a fim de cobrar impostos (Moura *et al.*, 2018).

A geometria formal surgiu, por sua vez, com os gregos ao “elaborar a noção de ponto, linha e plano, através de algumas descrições simples feitas com pedras e areia [...]” (Moura *et al.*, 2018, p. 9).

Por último, temos a geometria científica que, para o ensino tradicional, é prevista para os anos finais do Ensino Fundamental. Porém, Mame (2014, p.148) aponta que, na proposição de Davýdov (1982), o ensino de geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental deve formar nos alunos “[...] bases teóricas científicas, o que sustenta prenúncios de novas possibilidades conceituais sem apegos extremos à sustentação empírica”. Assim, a geometria científica deve ser considerada e ensinada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental por meio de regras formais e não apenas nos anos finais como propõe a lógica tradicional.

Desse modo, a escola deve ensinar a geometria a fim de contemplar seus momentos, ao proporcionar “[...] ao estudante, primeiramente, a formação do pensamento geométrico e, conseqüentemente, a manifestação desse pensamento por meio de uma linguagem matemática” (Freitas, 2022, p. 62).

Em seu processo de constituição, a geometria é formada por nexos conceituais que, de acordo com a autora, seriam os seguintes: a percepção de direção e sentido a fim de se localizar no espaço, que se constituiu quando o homem precisou localizar abrigos e alimentos; composição das formas e suas características presentes no espaço e objetos, que surgiu diante da observação das formas na natureza e sua transformação em ferramentas; identificação de figuras bidimensionais e tridimensionais, retratadas pelos desenhos e pinturas nas paredes e cavernas; compreensão das diferentes maneiras de constituir os objetos nos espaços, que é percebida na criação da roda e do tijolo (Freitas, 2022).

A criança tem contato com objetos e pessoas desde seu nascimento, por meio da interação que se estabelece na direção do seu desenvolvimento psíquico. Por isso, torna-se fundamental lidar com formas e relações espaciais, pois são elementos “[...] necessários para entender, interpretar e apreciar e atuar sobre este mundo ‘inerentemente geométrico’” (Lanner de Moura; Moura, 2001, p. 3). Portanto, a compreensão da geometria e de seus nexos se constitui em finalidade educativa e cabe, à escola, promover ações de ensino para que os alunos a alcance, tais quais

[...] situações onde ela possa representar objetos, comunicar estas representações, relacionar formas e propriedades das mesmas, relacionar tamanhos, orientar-se no espaço e apropriar-se

gradativamente da linguagem geométrica (Lanner de Moura; Moura, 2001, p. 6).

Ao professor, compete ensinar essa significação, de modo que possibilite aos alunos representações e situações em que experienciem a apropriação das formas, dos tamanhos, dos espaços e das medidas, com suas peculiaridades conceituais e os respectivos modo de ação. Porém, desde que assegure a compreensão de sua dimensão lógico-histórica e do seu caráter científico.

Ainda, a fim de compreender a essência da linguagem matemática, torna-se necessário conhecermos a álgebra, com o intuito de estabelecer relação entre as significações que compõem essa linguagem. Portanto, passamos a caracterizar a álgebra, ao destacarmos seus nexos conceituais e seu movimento lógico-histórico de constituição, em busca de sua compreensão e da organização do ensino da matemática.

4.3. Álgebra

De acordo com Aleksandrov *et al.* (1994), a álgebra é um conjunto de princípios que serve como base para as operações matemáticas, por meio da abstração dos números concretos. Seus problemas envolvem as regras formais de solução de equações e de transformação de expressões. Na álgebra, “[...] as grandezas são anotadas por letras, nas quais os cálculos são realizados de acordo com regras formais bem estabelecidas” (Aleksandrov *et al.*, 1994, p. 63, tradução nossa).

Essa significação, tal como as anteriores, é um conhecimento histórico que se constituiu “[...] de um processo humano de controlar o movimento das quantidades discretas e contínuas” (Moura, 2021, p. 67). Pelos conhecimentos algébricos, o homem pode estabelecer métodos gerais para a resolução de problemas e abstrair os números concretos. Portanto, essa significação, de acordo com Vygotsky (2001, p. 230, tradução nossa), “[...] constitui um novo e mais elevado nível de desenvolvimento do pensamento matemático abstrato, que reestrutura e eleva a um grau superior o pensamento aritmético previamente estabelecido”. Ao se apropriar desses conceitos, a criança forma generalizações⁹, à medida que desenvolve a mobilidade do

⁹ “[...] vincula-se ao significado da palavra, um fenômeno da linguagem, um ato verbal do pensamento de reflexão da realidade que extrapola as sensações e percepções imediatas” (Damazio *et al.*, 2012,

pensamento para representar quantidades variáveis e, portanto, novas qualidades de ações mentais dos sujeitos que as dominam. A álgebra [...] é aquela que segue tendência do homem de generalizar os padrões dos fenômenos que se repetem (Moura, 2021, p. 69).

A álgebra, à vista disso, auxilia na generalização da aritmética, por meio das representações gerais, que podem ser materializadas por falas, escritas, letras, fórmulas etc.

Essa significação surge com base em um movimento humano em busca de “[...] estabelecer métodos cada vez mais gerais de resolução de problemas, fossem do cotidiano ou internos à ciência matemática [...]” (Panossian, 2014, p. 97). Mesmo sem um momento exato de elaboração dos conceitos algébricos, o homem conseguiu realizar generalizações mais complexas no decorrer de suas relações sociais.

Ao pensarmos na organização de seu ensino na escola, é preciso levar em consideração que o conceito é composto pela álgebra não simbólica e simbólica. A primeira é dividida por fases, sendo elas:

retórica, geométrica e sincopada. Na álgebra retórica a variável é representada por uma palavra. No caso da álgebra geométrica, a variável é representada a partir de segmentos de reta. Já, na álgebra sincopada, a variável é representada, a partir da abreviação de palavras (Sousa, 2018, p. 51).

Ao contrário do que se pensa, a álgebra não é representada apenas por letras e incógnitas, como revela a álgebra não simbólica. O trabalho inicial na escola pode ser exatamente com a álgebra não simbólica, com a exploração de soluções de base retórica. Pela oralidade, por exemplo, na resolução de um problema matemático, podemos criar condições para o aluno dialogar, criar hipóteses e chegar em soluções. Estas podem ser expressas com a utilização de diferentes recursos e conceitos, como formas geométricas e números.

Para tanto, requer-se momentos e situações para os alunos escreverem o que estão pensando para a solução, ao fazer “[...] um ‘elo’ entre a escrita e o simbolismo algébrico. Neste caso, a álgebra sincopada é um instrumento, pois refere-se a escrita abreviada, com palavras, que possam representar parte da ideia materializada pela escrita” (Silva, 2022, p. 48-49).

Assim, também, a álgebra simbólica permite, ao aluno, elaborar uma síntese do que foi dialogado, pensado e escrito, por meio da linguagem simbólica, ou seja, pelo emprego de signos, os quais podem ser

uma letra, uma fórmula, símbolo, formas geométricas, sinais das operações matemáticas etc., ou seja, é um elemento que tenha sentido e significado com o conceito dentro do contexto algébrico, estabelecendo relação direta entre álgebra e simbolismo algébrico (Silva, 2022, p. 47).

A álgebra – não simbólica e simbólica – é composta por nexos conceituais específicos como: fluência, variável e campo de variação (Sousa, 2004). A fluência é a ideia de que tudo está em constante movimento e mudança. A variável “é a fluência, o próprio movimento, o fluxo do pensamento. [...] não tem existência por si só, enquanto ser em si a existência da variável, necessariamente, está relacionada ou associada a um determinado campo de variação” (Sousa, 2004, p. 82). Por fim, o campo de variação se refere à delimitação da área de extensão em que a variável pode atuar (Sousa, 2004). Os nexos conceituais devem revelar o movimento lógico-histórico “[...] dos conceitos algébricos, sendo lógico, porque os nexos constituem o movimento de pensamento, e histórico, por destacarem as mudanças da álgebra nas etapas do seu desenvolvimento” (Silva, 2022, p. 54).

Portanto, ao pensarmos sobre o ensino da álgebra e seus nexos, precisamos partir da necessidade de sistematizar, aos alunos, situações em que possam fazer afirmações, justificativas, propor hipóteses, reconhecer variáveis, regularidades, estabelecer relações entre grandezas e generalizá-las (Damazio *et al.*, 2012). O ensino da álgebra, com base nos seus nexos conceituais, possibilita a apropriação do conhecimento estudado e o desenvolvimento do pensamento teórico.

Diante das significações apresentadas, Rosa *et al.* (2009, p. 21) ressaltam que “Os pensamentos aritmético, geométrico e algébrico possuem, cada um, características próprias, mas as suas especificidades contribuem para o desenvolvimento um do outro”.

Pensar essas significações, no escopo de uma formação integral, é um desafio aos professores, tendo em vista a continuidade e o caráter interligado delas, mas com particularidades próprias que constituem a linguagem matemática como um todo. Portanto, no intuito de auxiliar nesse desafio, apresentamos, a seguir, a proposta de Davýdov (1982), para organizar o ensino tendo como base essa inter-relação.

4.4. Inter-relação da aritmética, geometria e álgebra

Pelas considerações e conceituações feitas até aqui, foi possível evidenciar a constituição da matemática como uma linguagem surgida “simultaneamente da aritmética e da geometria, e que alguns dos rudimentos da álgebra já tinham sido encontrados nas regras gerais da aritmética, uma parte que foi separada da aritmética numa fase posterior” (Aleksandrov *et al.*, 1994, p. 34, tradução nossa). Desse modo, essas significações não foram construídas isoladamente, mas se constituíram no decorrer do tempo de forma inter-relacionada em diversas situações, por exemplo, diante da necessidade do homem de delimitar o terreno para o plantio.

A humanidade precisou determinar superfície (área) e o tamanho de cada canteiro para que fosse feito o cultivo (geometria). Nesse processo, controlar as grandezas para a medição envolveu o cálculo e, nessa ação, a aritmética se fez necessária. Por sua vez, a relação com o envolvimento da grandeza área – medida de superfície – apresenta teor de caráter algébrico, pois essa significação busca a **“relação quantitativa entre as grandezas variáveis de forma geral**, sendo esta sua relação teórica essencial ou célula” (Panossian, 2014, p. 107, grifos da autora).

Todavia, mesmo com base nas necessidades humanas integrativas e instrumentais presentes na sociedade, a matemática se constitui com a integração de suas significações, o que ainda não percebemos na escola. Davýdov (1982) aponta que prevalece, na escola, um ensino fragmentado e sem relações em razão da perspectiva tradicional. Em sua crítica ao enfoque tradicional, o autor destaca que o ensino desses conceitos segue uma ordem cronológica, iniciada pela aritmética, com enfoque nos números e nas operações. Na sequência, com o decorrer dos anos iniciais de escolarização, volta-se à geometria e, ao ingressar nos anos finais do Ensino Fundamental, dirige-se à álgebra (Rosa, 2012).

[...] para a teoria empírica da generalização a ideia de mutabilidade do objeto e do aparato conceitual da ciência como formações integrais são vistas de forma estranha, em que as novas entidades e os métodos de sua análise mudam a visão da ciência e o caráter das inter-relações entre suas partes (Davýdov, 1982, p. 110, tradução nossa).

As significações são vistas de forma separada e pronta, pois se limitam aos aspectos empíricos e sensoriais dos conceitos matemáticos, que se esvaziam de sua essência. Davýdov (1982) e Davídov (1988) propõem um modo geral para a organização do ensino da matemática, que supere o pensamento empírico e promova a apropriação dos conceitos científicos, que forme abstrações e generalizações teóricas. Para o autor, “exceder completamente ou diminuir significativamente o divórcio entre ‘aritmética’ e ‘álgebra’, característico dos cursos escolares tradicionais” (Davýdov, 1982, p. 436, tradução nossa) seria essencial na compreensão da matemática. Portanto, a proposta davydoviana inter-relaciona a "aritmética " e a "álgebra", bem como inclui a significação geométrica (Rosa, 2012), em busca de uma formação integral e humanizadora.

Diante disso, é necessário pensar em novas estratégias para organizar o ensino que compreendam a matemática com diferentes conceitos inter-relacionados. De acordo com Rosa (2012), a escola, ao seguir a proposição de Davidov e colaboradores, apresenta a matemática como um todo contínuo e contempla essas três significações. Mas, para o aluno ter acesso a essa aprendizagem, é requisitado ao professor a compreensão dessa interligação.

Com o objetivo de auxiliar o professor com possibilidades didáticas a fim de organizar o ensino da linguagem matemática, a seguir, apresentamos a metodologia empregada nesta dissertação, em direção à compreensão do ensino de multiplicação de acordo com a base teórica adotada.

5. METODOLOGIA

A presente pesquisa tem como objeto de investigação a multiplicação, com o esforço de estudá-la em sua totalidade, pautada no método do materialismo histórico-dialético. Para isso, a preocupação se voltou à compreensão da organização do ensino do referido conceito, de forma a superar o nível empírico de sua apropriação, por meio da análise e da abstração do objeto estudado. De acordo com Martins e Lavoura (2018, p. 226),

A aparência fenomênica, imediata e empírica da realidade é importante e não pode ser descartada, visto que ela é o ponto de partida do processo do conhecimento – portanto, necessariamente onde se inicia o conhecimento. Entretanto, deve-se, partindo da aparência, alcançar a essência do objeto de estudo, capturar sua lógica interna de funcionamento que corresponde à estrutura e à dinâmica essencial.

Os autores afirmam: é “preciso caminhar das representações primárias e das significações consensuais em sua imediatez sensível em direção à descoberta das múltiplas determinações ontológicas do real” (Martins; Lavoura, 2018, p. 230). Esse movimento promoverá a compreensão da essência do objeto estudado, sem desconsiderar suas múltiplas determinações e a relação dialética singular-particular-universal que o envolve. Para Oliveira (2005, p. 2), ao pesquisador, é necessário “compreender essa complexidade da universalidade que se concretiza na singularidade, numa dinâmica multifacetada, através das mediações sociais – a particularidade” (Oliveira, 2005, p. 2).

Ao definirmos nosso objeto de estudo, reconhecemos a inter-relação entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas como universal e, em busca de compreendê-lo, é necessário que entendamos sua singularidade, isto é, o ensino de multiplicação. Por isso, realizamos estudos teóricos e partimos de uma particularidade que, no nosso caso, foi uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem sobre a ideia de proporcionalidade. Ao partirmos dessa ideia, pressupomos a possibilidade de identificar a inter-relação das significações matemáticas no ensino de multiplicação.

Essa forma de investigar os fenômenos aponta “como premissa central a necessidade de compreender e de explicar os objetos e fenômenos investigados, tais quais eles verdadeiramente são na prática” (Martins; Lavoura, 2018, p. 225).

Assim, com base em uma pesquisa conceitual, de caráter bibliográfico propositivo (Larocca; Rosso; Souza, 2005), investigamos o ensino da multiplicação, a fim de produzir uma síntese entre a teoria e a prática. Isso porque reconhecemos as ações formativas, fundamentais para o desenvolvimento do pensamento teórico (Araújo; Moraes, 2017). Ao objetivar a compreensão dos fenômenos investigados, temos por base “[...] a eleição do acervo a ser analisado, consubstanciado, então, como campo ou material de análise [...]” (Martins; Lavoura, 2018, p. 236).

Portanto, a pesquisa bibliográfica propositiva requisita atenção à produção de informações amplas sobre o ensino de multiplicação, com base nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, em um movimento dialético, como realizamos nas seções anteriores. Para isso, seguimos o seguinte movimento:

- explicitação dos significados dos conceitos apresentados nas obras eleitas e suas correlações tendo em vista a formulação de uma síntese primária em relação ao material em análise;
- identificação da(s) ideia(s) diretriz(es), isto é, das asserções e das ideias explicativas às mesmas (razões) presentes nos textos, ou seja, desvelamento da(s) relação(ões) asserção/razão fundamental(is) nas obras;
- diferenciação e análise comparativa das ideias diretrizes entre si a fim de determinar a importância relativa de cada uma delas no conjunto das produções do(s) autor(es) em foco e;
- operação de síntese, isto é, integração racional dos dados descobertos no conjunto organizado das produções sobre o tema em investigação e em resposta ao problema anunciado (Martins; Lavoura, 2018, p. 236).

Para organizar e discutir os dados apresentados, examinamos livros e artigos de Davydov (1982, 1987, 1988), Vigotski (1931, 1996, 2001, 2004), Leontiev (1978, 2004, 2016), Elkonin (1969, 1987), Luria (1987), Aleksandrov *et al.* (1994), Caraça (1951), Rosa (2012) e, Rosa e Damazio (2017), Isso ocorreu com a finalidade de abordar alguns conceitos, considerados essenciais nas respostas às nossas perguntas, como: o desenvolvimento das FPS, da atividade, a periodização, a linguagem matemática, o pensamento empírico e teórico, as ações de estudo, as tarefas de estudo e as particulares, a Atividade Orientadora de Ensino, a Situação Desencadeadora de Aprendizagem, as significações matemáticas e a sua inter-relação, etc.

Assim, colocamo-nos diante da pergunta norteadora desta pesquisa: como organizar o ensino de multiplicação, nos anos iniciais de escolarização, que oportunize as condições para desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos? A seguir, passamos a conceituar princípios teórico-metodológicos que nos ajudaram a compreender a multiplicação e a reconhecer novas formas de organização didática.

6. A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DE MATEMÁTICA COM FOCO NA MULTIPLICAÇÃO

A multiplicação é um conceito essencial da matemática que, inicialmente, visava satisfazer a necessidade de controlar grandes quantidades. Conforme Ibrah (1997), os pastores de ovelha utilizavam pedras, nós em cordas e até riscos em ossos para marcar a quantidade de seu rebanho. Isso caracteriza a relação com o conceito da correspondência biunívoca. Mas, se o pastor tivesse 200 ovelhas, como seria para ele carregar 200 pedras durante todo o dia? Correria o risco de perder a conta, perder as pedras, além de ser muito pesado, o que impossibilitaria a realização de outras tarefas cotidianas. Se fizesse riscos nos ossos ou nós em corda, teria o suficiente para contar todo o rebanho? Seria possível tantas marcas nos ossos?

Isso fez com que, ao longo da história, a contagem um a um não fosse a única estratégia para o controle de quantidades. Surge, pois, a necessidade de outras formas para tal finalidade, principalmente, quando o quantitativo era maior, com a ideia de agrupamentos, já que uma pedra, um nó ou um risco não seria mais equivalente a uma ovelha, mas poderia equivaler a 10 ovelhas, por exemplo, se pensar na base decimal. Se o pastor tivesse 200 ovelhas, precisaria de 20 pedras, sendo, cada uma delas, equivalente a 10 ovelhas. O homem criou estratégias para controlar grandes quantidades, ao adotar a contagem por meio de agrupamentos, que culminou a sistematização da multiplicação.

De acordo com Caraça (1951, p. 18), “[...] a multiplicação define-se como uma soma de parcelas iguais [...]”, por exemplo $a \cdot b = a + a + \dots + a$, em que b seria a soma de a sucessivas vezes, que representa a relação universal desse conceito. Nesse caso,

Ao número a , parcela que se repete, chama-se multiplicando; ao número $b > 1$, número de vezes que a aparece como parcela, chama-se multiplicador; aos dois, em conjunto, dá-se o nome de factores; ao resultado, o de produto (Caraça, 1951, p. 18).

Para Caraça (1951), o multiplicando tem um papel passivo e o multiplicador, ativo, pois o produto se altera dependendo do valor dado ao multiplicador, que age de forma ativa no multiplicando. Essa definição anunciada por

Caraça (1951) é apresentada na relação universal proposta por Davídov (1988) em que

o número b , que se repete, chama-se multiplicando (unidade de medida intermediária); o número c , que representa a quantidade de vezes que b se repete, chama-se multiplicador, e o resultado (a) é chamado produto (total de unidades básicas) (Rosa; Damazio; Crestani, 2014, p. 183).

A relação universal proposta por Davídov (1988) possibilita a compreensão da multiplicação como uma adição de parcelas iguais, por meio da relação entre grandezas. Esse entendimento do autor, carrega a ideia central do referido conceito quando o agrupamento se refere à adoção de uma unidade intermediária, constituída por unidades básicas de medida. As unidades, intermediária e básica, permitem ao aluno dominar o procedimento geral da multiplicação; isto é, ao entender a relação universal ($a.b = \text{produto}$), ele resolverá diferentes situações que envolvem esse conceito.

Além dessa compreensão, apresentada por Caraça (1951) e Davídov (1988), a educação matemática entende que essa operação apresenta diferentes ideias, além da já citada, como: proporcionalidade, disposição retangular e raciocínio combinatório (Moretti; Souza, 2015). Apesar de tais ideias partirem do mesmo conceito e se voltarem para a ideia de soma de parcelas iguais, elas envolvem ações mentais diferentes quando as empregamos na resolução de problemas.

De acordo com Moretti e Souza (2015, p. 90), a ideia de adição de parcelas iguais é a mais abordada em sala de aula, pois “apresenta a multiplicação como instrumento que sintetiza (torna mais econômica), a soma”. Para Caraça (1951), essa ideia é a essência da multiplicação e se refere a uma soma repetitiva de um mesmo número, por exemplo: uma pessoa tem dois pés, qual o total de pés em um grupo de 4 pessoas? Para resolver essa problematização, temos: $2+2+2+2 = 2 \times 4 = 8$. Por meio desse exemplo, pode ser desenvolvida a ideia de proporcionalidade, uma vez que cada pessoa tem dois pés, portanto, quantos pés têm o conjunto de 4 pessoas? Essa ideia estabelece relação entre grandezas discretas (pessoas e pés). Isso também está presente nas receitas culinárias, por se referir às proporções dos ingredientes, nas regras de três, em semelhanças de figuras e em comparação de grandezas (massa, comprimento, tempo, área, capacidade). Tais situações são exemplificadas no livro

didático do sistema de ensino Davydov-Elkonin, conforme tarefa analisada por Rosa, Damazio e Crestani (2014).

Como mostra a Figura 1, o professor apresenta dois recipientes com a mesma forma e o mesmo tamanho, em que um terá um líquido com volume K e outro estará vazio. A tarefa do aluno é transferir o líquido de um recipiente para o outro. Para isso, terão outros dois recipientes vazios com a mesma forma dos anteriores, mas menores e com capacidades diferentes, que serão utilizados como unidade para medir o volume K .

Figura 1 - recipientes e unidades de medida básica e intermediária



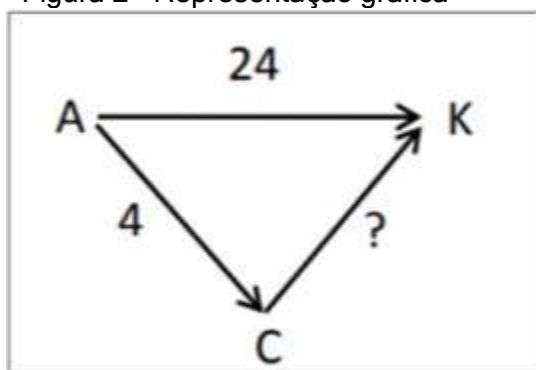
Fonte: Rosa, Damazio e Crestani (2014, p. 170).

Com base nessa tarefa, é possível explicitar que a ideia de proporcionalidade envolve a grandeza volume, pois, para se descobrir quantas vezes utilizará os recipientes A e C para transpor o líquido K a outro recipiente vazio, a proporção é fundamental.

Na resolução da tarefa apresentada por Rosa, Damazio e Crestani (2014), é evidenciada a relação universal proposta por Davídov (1988), manifestada nas relações entre medida básica e intermediária. Ao fazer a transferência do líquido de K para o outro recipiente, utiliza-se 24 vezes A , como destacam os autores. Mas, será que essa é a forma mais rápida de fazer a transferência do líquido? Nesse sentido, o professor deve instigar os alunos a buscarem uma solução mais rápida a fim de chegarem à conclusão de que “[...] a utilização de um recipiente de volume maior facilita o processo de transferência e, conseqüentemente, de medição” (Rosa; Damazio; Crestani, 2014, p. 171). Portanto, para a resolução, é possível comparar os volumes dos recipientes A e C , em que A seria a unidade básica de medida e C , a unidade intermediária.

Ao fazer a comparação entre A e C , é possível constatar que C equivale a $4.A$. Portanto, quantas vezes C equivale a K ? Essa resposta pode ser representada graficamente pela Figura 2.

Figura 2 - Representação gráfica



Fonte: Rosa, Damazio e Crestani (2014, p. 172).

No esquema representado na figura 2, a seta da esquerda para baixo (AC) representa o valor da medida intermediária (4), a seta da esquerda para a direita (AK), o valor total da medida básica (24) e a seta da direita para cima (CK) é o valor a ser descoberto, isto é, quantas vezes C (quantidade de unidades intermediárias) precisa ser colocado no recipiente a fim de corresponder ao volume de K. Para a resolução da tarefa, a fim de descobrir a incógnita apresentada, é possível constatar que,

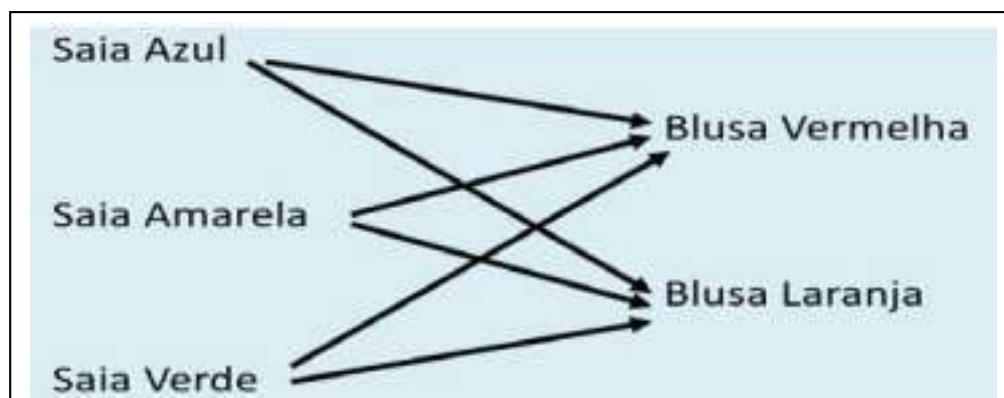
Como o valor de cada medida intermediária é quatro (4) unidades básicas, os agrupamentos (delimitados pelos arcos) serão compostos, na reta, por quatro unidades cada, até atingir o total de 24 unidades de medidas básicas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Em seguida, verifica-se a quantidade de arcos que se formaram. A conclusão a ser obtida é que são 24 unidades básicas ao todo, agrupadas de quatro em quatro, por seis vezes (Rosa; Damazio; Crestani, 2014, p. 172).

Por meio da relação universal apresentada, foi possível determinar que a medida intermediária se repete 6 vezes e o produto, isto é, quantidade de medida básica é 24. De acordo com os autores, a relação entre as medidas possibilita a compreensão do conceito estudado e revela seus aspectos internos, isto é, sua essência, e desenvolve o pensamento teórico dos escolares. Isso requer articulações de pensamentos num contextos de sistema conceitual, por requer a superação dos aspectos dados pelos órgãos do sentido, ou seja, pela observação.

Temos, também, de acordo com Moretti e Sousa (2015), a ideia de combinatória, que se relaciona na descoberta de possibilidades que existem ao formular pares com duas coleções. Desse modo, quando se tem dois objetos que devem ser combinados entre si – por exemplo, uma combinação de roupas, sabores de sorvete, montagem de lanches, entre outros –, podemos combinar os elementos.

Para a resolução de problemas que envolvem a combinação, é comum a representação pelo diagrama de árvores, como mostra a Figura 3.

Figura 3 - Exemplo de árvore das possibilidades.



Fonte: Gil, Lacanallo-Arrais e Rocha (2023, p. 232).

Por último, a ideia de disposição retangular, em que se tem a organização de linhas e colunas como forma de organizar objetos, a fim de realizar uma adição de parcelas iguais, ao estabelecer relação entre grandezas. Essa disposição pode ser vista em situações do dia a dia, como na organização das carteiras em sala de aula, em mesas distribuídas em um salão e no ensino do conceito de área. O material quadriculado é um recurso que pode contribuir na resolução de problemas com essa ideia, pois permite a visualização das linhas e das colunas, o que promove as condições concretas para a realização dos cálculos.

As diferentes ideias que compõem o conceito multiplicativo estão presentes no contexto social dos alunos e, por isso, é necessário que sejam apropriadas na escola. Essas podem ser vistas como adição de parcelas iguais ao estabelecer relação entre grandezas, tendo como base a definição apresentada por Caraça (1951) e Davidov (1988).

Em nosso entendimento, essas últimas duas ideias multiplicativas mencionadas também se configuram adição de mesmas parcelas. Por exemplo, na figura 3 - árvore de possibilidades (ideia de combinação) - ao observarmos com base nas blusas, à direita, observaremos dois grupos composto de três flechas (trajes), isto é: $3 + 3$. Sua transformação para a representação na forma da multiplicação, conforme Caraça (1951), é: 3×2 (a unidade intermediária três se repete duas vezes). Do mesmo modo, se a referência for à esquerda - as saias - identificaremos três grupos com dois trajes que se traduz em $2 + 2 + 2$ que, pela definição de multiplicação (Caraça, 1951) é 2×3 , isto é, o 2 se repete 3 vezes.

Da mesma forma, a ideia multiplicativa de configuração retangular traz a possibilidade de uma leitura de adição de parcelas iguais. Isso se explicita ao considerarmos que a superfície do retângulo é coberta unidades distribuídas, genericamente, em m linhas e n colunas. Assim, se adotarmos um coluna como unidade intermediária, então teremos a adição $n + n + n + \dots + n$, ou seja, $n \times m$ (n tomado por m vezes). De modo similar, ocorre se a referência como unidade intermediária for uma linha da superfície. Nesse caso, teremos $m + m + m + \dots + m$, que se traduz na multiplicação $m \times n$ (a repetição do m por n vezes). Em todas as situações da multiplicação, movimentada pela concepção do papel fundamental da unidade intermediária, a evidência peculiar e necessária da propriedade comutativa.

Essas explicações nos causam o entendimento de que a adição de parcelas iguais é um dos componentes conceitual essencial, conforme define Caraça (1951), da multiplicação. Isso porque, mesmos nas situações singulares - como as ideias de configuração retangular e combinatória - ela se torna referência.

Portanto, as ideias - com teores multiplicativos - são vistas no modelo universal da multiplicação, nas relações entre grandezas, por meio de unidades intermediárias e básicas, as quais permitem a reprodução mental do conceito de multiplicação, pois

o conceito constitui o procedimento e o meio de reprodução mental de qualquer objeto como um sistema integral. Ter o conceito de tal objeto significa dominar o procedimento geral de construção mental desse objeto (Daviđov, 1988, p. 153, tradução nossa).





Diante das constatações apresentadas, cabe questionar se o ensino da multiplicação tem possibilitado a formação do pensamento teórico e de sua relação universal? Desse modo, Rosa (2012, p. 25) afirma que, no ambiente escolar, quanto ao ensino matemático, há

o predomínio da formação do pensamento empírico, nos escolares dos anos iniciais. Isso significa que é esse tipo de pensamento que desenvolvemos, quando recebemos os primeiros ensinamentos do conceito de número e de todo o sistema conceitual do qual ele faz parte.

Essa constatação nos preocupa, como professoras. Como o ensino da multiplicação, presente nas escolas brasileiras, se reduz ao pensamento empírico, como afirma Galdino (2016), a evidência se apresenta em exercícios, como o da Figura 4, conforme analisou a referida autora.

A autora afirma que tais tipos de exercícios, presentes nas escolas, focalizam o princípio do caráter visual (direto ou intuitivo) no ensino, “isto porque atende ao reflexo sensorial das características externas dos objetos. [...] exercícios como estes possibilitam ao estudante operar somente com aquilo que memorizou na esfera singular” (Galdino, 2016, p. 37-38).

Figura 4 - Adição de quantidades iguais

Atividade	Quantidade	Resultado
	$2+2+2+2$	$4 \times 2 = 8$
	$2+2+2$	$3 \times 2 = 6$
	$5+5+5$	$5 \times 5 = 25$
	$3+3+3+3$	$5 \times 7 = 35$

Fonte: Galdino (2016, p. 37).

A Figura 4 evidencia que, no referido exercício, o aluno deve fazer a observação direta da quantidade dos vasos, a fim de saber quantas flores os vasos têm no total. Para chegar ao resultado da operação, ele apenas pode contar as flores de forma direta, sem que compreenda a essência do conceito multiplicativo. De acordo com a autora, esse exercício e outras propostas apresentadas em sua dissertação, direcionadas ao estudo da multiplicação, evidenciam que a essência do ensino é o pensamento empírico, por se pautar nas propriedades similares dos objetos. Realizar a contagem com apoio de objetos ou até mesmo com a utilização dos dedos das mãos, por exemplo, é uma etapa importante para apropriação da matemática, mas, para a Teoria Histórico-Cultural e a Atividade Orientadora de Ensino,

[...] os estudantes devem ir à escola para aprender aquilo que não lhes é acessível em casa, na rua e nas brincadeiras entre amigos. Desse modo, em situações extraescolares, no período pré-escolar, as crianças aprendem a contar nos dedos ou com apoio de objetos. Cabe ressaltar, portanto, que a contagem com dedos ou riscos consiste em uma etapa importante na apropriação dos conceitos matemáticos,

entretanto ela precisa ser superada na idade escolar (Galdino, 2016, p. 56).

Isso revela que o pensamento formado pelo ensino tradicional tem caráter catalogador, classificador e “[...] garante a orientação da pessoa no sistema de conhecimentos já acumulados sobre as particularidades e características externas de objetos e fenômenos isolados da natureza e da sociedade” (Daviđov, 1987, p.144, tradução nossa).

Todavia, de acordo com Daviđov (1982), a preocupação central do ensino escolar é viabilizar o desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos, aquele que possibilita abstrações e generalizações teóricas, em direção à compreensão da essência do conceito, nesta pesquisa, o de multiplicação. Nessa direção, além das proposições davydovianas, temos a Atividade Orientadora de Ensino como outra proposição que auxilia o professor a materializar os trabalhos com vistas à formação desse pensamento. Galdino (2016, p. 59) destaca que ambas se configuram “como um modo de objetivação da Teoria Histórico-Cultural na organização do ensino de Matemática”.

Assim, ao pensarmos nesse referencial, temos, como forma de materializar o ensino, a utilização de uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem ou tarefas de estudo propostas pelo professor, as quais possibilitam a apropriação do conceito, reconhecido como um conhecimento humano produzido historicamente e socialmente. Esse conhecimento explicita “a necessidade que levou a humanidade à construção do referido conceito” (Moura *et al.*, 2010, p. 223).

A Situação Desencadeadora de Aprendizagem e as tarefas de estudo permitem que, por meio das interações promovidas pelo professor, seja criada a necessidade no aluno de se apropriar do conceito, – dentre eles, o multiplicativo – de forma a possibilitar a atribuição de sentido e significado ao que se aprende na escola. Galdino (2016) afirma que a Situação Desencadeadora de Aprendizagem equivale às tarefas de estudos do modo davidoviano de organização de ensino. Isso porque, em sua organização, elas buscam condições para atingir o objetivo da atividade de ensino, pois, assim, “os estudantes revelam a origem da ‘célula’ do objeto integral estudado e, ao utilizá-la, reproduzem mentalmente esse objeto” (Daviđov, 1988, p. 179, tradução nossa).

Desse modo, revelar a célula do conceito de multiplicação significa compreender a sua relação universal, introduzida pela medição de grandezas que

“criem a necessidade de adoção de uma medida intermediária, pois ela é elemento de explicitação do princípio multiplicativo” (Madeira, 2012, p. 97). Portanto, a condição primordial é se chegar na relação universal apresentada por Caraça (1951) e Davíдов (1988), por meio da unidade básica e intermediária.

À vista disso, para a apropriação do conceito multiplicativo e o desenvolvimento do pensamento teórico proposto por Davíдов (1988) por meio da relação universal, é necessário que o ensino seja organizado e sistematizado, de forma orientada pelo professor, com processos analíticos que transcendam as experiências sensoriais e empíricas (Galdino, 2016).

Nesse sentido, Rosa, Damazio e Crestani (2014, p. 185) afirmam que o conceito multiplicativo é postulado por uma apresentação, cuja base é a “inter-relação entre os campos aritmético (operações numéricas), geométrico (reta numérica, esquema abstrato, volume, comprimento) e algébrico (relação genérica entre as grandezas representadas por meio de letras)”. Para assegurar essa inter-relação, o professor, por meio de uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem ou tarefa de estudo, favorece a busca, pelos alunos, da solução para o problema e, desse modo, insere-os no movimento de atividade de estudo. Assim, eles reproduzirão

[...] o processo real pelo qual os homens criam conceitos, imagens, valores e normas. [...] Na atividade de estudo, as jovens gerações reproduzem na sua consciência as riquezas teóricas que a humanidade acumulou e expressou nas formas ideais de cultura espiritual. Como outros tipos de atividade reprodutiva infantil, o estudo constitui uma das vias de realização da unidade do histórico e do lógico no desenvolvimento da cultura humana (Davíдов, 1988, p. 175, tradução nossa).

Os conceitos e princípios teórico-metodológicos, discutidos nesta dissertação, servem de argumentos para concluir que os alunos, ao estarem em atividade de estudo, reconhecerão a necessidade de compreender a multiplicação. Para tanto, dependendo das condições objetivas que lhe são proporcionadas, as significações matemáticas se farão essenciais na resolução das Situações Desencadeadoras de Aprendizagem e nas tarefas propostas. Desse modo, essas formas de organizar o ensino possibilitam, ao estudante, conceber a aritmética, a geometria e a álgebra de maneira inter-relacionada.

De acordo com Davíдов (1988, p. 214, tradução nossa), na resolução da tarefa de estudo - o que também vale para a Situação Desencadeadora de Aprendizagem -, revelam-se as significações, que “[...] cumprem um importante papel na formação

dos conceitos matemáticos. Sua particularidade essencial é que reúnem o sentido abstrato com a concretização objetiva”. A inter-relação entre as significações possibilita a compreensão da gênese multiplicativa, a qual representa, “[...] em âmbito teórico, a forma universal do objeto” (Rosa; Fontes, 2022, p. 18) e auxilia na resolução de situações particulares referentes ao conceito.

Em busca da inter-relação das significações matemáticas no ensino da multiplicação, com o intuito de desenvolver o pensamento teórico dos alunos, a seguir, apresentamos uma proposição didática ao envolver a ideia de proporcionalidade, na direção da compreensão da relação universal do conceito multiplicativo.

7. PROPOSIÇÃO DIDÁTICA PARA O ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO

Por considerarmos que essa inter-relação é um caminho para o desenvolvimento do ensino de multiplicação – na perspectiva que defendemos – nesta seção, apresentamos uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem (SDA), com ênfase na abordagem de uma das ideias multiplicativas, a proporcionalidade. A escolha ocorreu com base na revisão de literatura realizada (Gil, Silva e Lacanallo-Arrais, 2023) subsidiadora para a constatação de que as Situações Desencadeadoras de Aprendizagem, elaboradas e propostas de 2015 a 2023, voltadas à ideia de proporcionalidade, não merece tanto destaque, isto é, pouco explorada.

Afinal, como professores que ensinam matemática, cabe a nós questionar: como organizar o ensino de multiplicação, de modo a inter-relacionar as significações e ideias matemáticas que lhes são pertinentes? Em busca de possibilidades didáticas para ensinar o conceito em destaque, torna-se necessário considerarmos algumas questões, como aponta Ferro (2023, p. 75):

- a criança em suas múltiplas determinações;
- a atividade de ensino e de aprendizagem;
- as necessidades e os motivos da criança, na sua atividade principal;
- a organização do espaço e do tempo;
- os objetos manipuláveis;
- as ações compartilhadas;
- as intervenções intencionalmente sistematizadas do professor

À vista dessas questões, o conceito de multiplicação é previsto na Base Nacional Comum Curricular - BNCC para o 2º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental e, no 4º ano, o significado de proporcionalidade. Assim como abordado nas habilidades previstas para esse ano escolar:

(EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos (Brasil, 2018, p. 289).

Tendo como referência a tríade sujeito-conteúdo-forma, a Situação Desencadeadora de Aprendizagem, por nós elaborada, foi pensada para alunos do 4º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Esses alunos, conforme a Teoria Histórico-Cultural, têm como atividade principal o estudo e, por meio dele, satisfazem

suas necessidades e resolvem os problemas, em direção à apropriação das experiências humanas elaboradas historicamente e determinadas socialmente. Davídov (1988, p. 158, tradução nossa) afirma que, na atividade de estudo,

[...] como atividade orientadora da idade escolar inicial, as crianças reproduzem não só os conhecimentos e competências correspondentes aos fundamentos das formas de consciência social [...], mas também as capacidades, historicamente emergidas, que estão na base da consciência teórica e pensamento: reflexão, análise, experimento mental. Ou seja, o conteúdo da atividade de estudo é o conhecimento teórico.

Em busca da apropriação do conhecimento teórico, ao se colocar em atividade de estudo, consideramos a Situação Desencadeadora de Aprendizagem uma forma de organizar o processo de aprendizagem que produz, nos alunos, a necessidade de se apropriar do conceito. Diante disso, decidimos, entre outros, pelo recurso metodológico situação emergente do cotidiano, com foco na ideia de proporcionalidade. A escolha por tal tipo de SDA justifica-se porque a revisão a indica como a menos utilizada e prevaleceu o recurso metodológico história virtual do conceito. Também, a opção pela ideia de proporcionalidade, ideia conceitual a ser desenvolvida, ocorreu por ser a menos adotada nas Situações Desencadeadoras de Aprendizagem, apresentadas. Embora não identificadas nas produções analisadas, para nós, tanto a situação emergente do cotidiano quanto a ideia de proporcionalidade são essenciais à compreensão do conceito de multiplicação, já que as Situações Desencadeadoras de Aprendizagem possibilita que os alunos estejam em atividade de aprendizagem em busca de abstrações e generalizações teóricas e a proporcionalidade compõe uma das ideias multiplicativas essenciais para sua compreensão.

Quando pensamos na ideia de proporcionalidade, entendemo-la como “[...] uma capacidade mental necessária para os alunos compreenderem os contextos, as aplicações matemáticas e sejam capazes de relacioná-los na resolução de problemas” (Catena, 2023, p. 53). A proporcionalidade envolve a comparação, a compensação, a equivalência, a correspondência, etc., em busca do estabelecimento de relações entre grandezas, que possibilita a integração de sentidos e significados em sua aprendizagem. Ao se deparar com ações multiplicativas, que envolvem a proporcionalidade nas situações matemáticas, o aluno elaborará argumentos,

análises, discussões e estratégias para solucionar os problemas propostos (Catena, 2023).

Desse modo, a proporcionalidade, de acordo com Toledo e Toledo (1997, p. 137), constitui-se “[...] um dos temas de maior importância no ensino da Matemática, pois é a partir dela que se formam as noções de razão, proporção, número racional, medida, regra de três, porcentagem, probabilidades, semelhança de figuras, escalas, entre outras”. Portanto, a princípio, nossa proposta adota com referência uma situação emergente do cotidiano – proposta e desenvolvida com os alunos – que se configura como promotora de aprendizagem em nível teórico. Selecionamos, para isso, a temática de figurinhas, por fazerem parte do contexto infantil, com a justificativa, a seguir.

7.1 Por que explorar como Situação Desencadeadora de Aprendizagem as figurinhas?¹⁰

A escolha por elaborar uma situação com a finalidade de problematizar a troca de figurinhas justifica-se ao pensarmos em possibilidades presentes no dia a dia dos alunos que envolvem a ideia de proporção. Dentre elas, consideramos que o álbum de figurinha e as trocas realizadas seriam algo próximo a elas. No dia a dia dos alunos, percebemos, nas escolas, o quanto elas gostam de colecionar figurinhas e trocá-las, em especial durante o evento copa do mundo (campeonato esportivo que reúne os melhores times de futebol de vários países do mundo). Dentro e fora das escolas, essa ação mobiliza as pessoas a completar o álbum.

Em 2023, por exemplo, de julho a agosto, na Austrália e na Nova Zelândia, aconteceu a Copa do Mundo Feminina da Fifa. Por contar com a participação de 32 seleções, consolidou-se como a maior competição de futebol feminino do planeta. Apesar de a diferença no fuso horário¹¹ dificultar que os brasileiros assistissem aos jogos, a possibilidade da conquista de um título inédito para a seleção brasileira movimentou os alunos nas escolas. Muitos falavam e torciam para as jogadoras e isso se intensificou com o lançamento de um álbum de figurinhas.

¹⁰ Utilizaremos, na dissertação, o termo figurinha, apesar de oficialmente nomear-se como *cards* ou *chromos*. A escolha se deu por essa palavra estar na língua portuguesa e por ser a forma adotada pelas crianças.

¹¹ De acordo com o fuso horário, na Austrália, a diferença é de 13 horas a mais no horário que no Brasil, já na Nova Zelândia é de 16 a mais que no Brasil.

De acordo com o site da Editora Panini (2023, p.1), responsável pela produção e venda do álbum oficial da Copa, havia figurinhas de “todas as seleções participantes do torneio. São 580 figurinhas para colecionar e lembrar os momentos mais emocionantes das partidas e as craques”.

A Panini lançou e lança diversos álbuns de figurinhas que envolvem a copa do mundo masculina, feminina, libertadores, entre outros campeonatos de futebol, como retratado, na Figura 5, a copa feminina. Além dos álbuns sobre campeonatos esportivos, há outros voltados a personagens infantis e infanto-juvenis como *Marvel*, *Comics* e *Turma da Mônica*, conforme a Figura 6. Isso mostra que pensar na ideia de figurinhas é retratar em uma situação com a qual o aluno se depara em seu cotidiano.

Figura 5 - Álbum copa feminina 2023



Fonte: Panini(2023).

Figura 6 - Álbum *Marvel*



Fonte: Princiotti (2020).

Nos álbuns da copa, a organização é feita em páginas distribuídas por seleções, com espaços indicados para colar a figurinha dos(as) jogadores(as) e brasão do time, na seguinte ordem: brasão, figurinha coletiva da seleção, goleiro, zagueiros, meio campo e, por fim, atacantes, conforme as Figuras 7 e 8.

Figura 7 - Página do álbum para completar Figura 8 - Página do álbum com as figurinhas



Fonte: Patrick (2022).



Fonte: Muratori (2019).

As figurinhas são comercializadas em pacotes com 5 unidades em cada um, como mostra a Figura 9. Além das figurinhas comuns, no álbum, há outras figurinhas douradas (Figura 10), chamadas de especiais. Recebem esse nome, pois, para cada seleção, pode existir apenas uma ou duas; portanto, ao se ter 19 figurinhas da seleção, tem-se 1 chance em 19 para tirá-la.

Figura 9 - Pacote com 5 figurinhas



Fonte: Utilidades (2023).

Figura 10 - Figurinhas douradas



Fonte: Peixoto (2022).

Para completar o álbum, existe a necessidade de trocá-las, pois, ao comprar os envelopes com as figurinhas, a chance de serem repetidas é grande. As figurinhas repetidas são trocadas uma por uma, mas, ao se tratar de uma dourada, o critério é outro. As mudanças variam de grupo para grupo, pois não há uma regra definida, porém, o predomínio é que, ao se ter uma dourada, ela pode ser trocada por mais de uma figurinha comum.

Sabemos que essa situação emergente tem possibilidades de se repetir a cada 4 anos, quando consideramos a Copa do mundo de futebol masculino. Temos, contudo, vários torneios esportivos de futebol e de outros esportes, como de bicicleta,

basquete, vôlei etc., que podem ser referência didática, com a mesma temática. Além disso, podemos pensar na montagem de álbuns temáticos de figurinhas nas escolas com temas variados como: pontos turísticos das cidades, professores que trabalharam na escola, funcionários, dos alunos, países, estados e municípios; além disso é possível colocar a comida típica desse lugar, a fauna, flora etc.

Todavia, sabemos da relação do nosso país com o futebol e reconhecemos o potencial das trocas de figurinhas como uma situação emergente do cotidiano, pois, de acordo com Prado *et al.* (2022, n.p),

Criança, jovem ou adulto, aqueles que decidiram colecionar têm uma coisa em comum. Para completar o álbum, além de comprar os pacotes, a solução mais econômica é trocar figurinhas. O processo de troca é tradição quando o assunto é álbum de figurinha. Além da diversão, tal prática ajuda a economizar dinheiro. Já que ao invés de comprar mais pacotes, é possível completar o álbum trocando as figurinhas repetidas com outras pessoas.

Portanto, de maneira mais expressiva na Copa masculina e de forma mais discreta na feminina, as famílias e os alunos se reuniram, para realizarem essas trocas, nas escolas e em diferentes espaços públicos e privados de convívio social como praças, estádios, shoppings e outros. Sendo assim, por que não propor essa situação no processo de ensino da multiplicação?

De acordo com Bellini (2018), os álbuns de figurinhas foram utilizados, em salas de aulas, tanto em escolas públicas quanto privadas, para ensinar conceitos de diversas disciplinas tais como: matemática, português, arte, geografia e história. Ao se tratar da matemática, foco de nossa pesquisa, de acordo com Calçade (2018), o problema das figurinhas pode ser desenvolvido no ensino das operações aritméticas (subtração, adição, multiplicação e divisão); geométricas, com as bandeiras dos países, construção de gráficos; de grandezas e medidas, relacionadas nos mapas, por meio da expansão territorial dos países; dentre outros conceitos. Ressaltamos que, apesar de as figurinhas serem adotadas como material didático para o ensino de matemática (Calçade, 2018), elas ainda não foram empregadas na perspectiva dos pressupostos de Davídov (1988) e da Atividade Orientadora de Ensino, com a finalidade de inter-relacionar as significações matemáticas.

Esse trabalho, com os álbuns de figurinhas para ensinar os conceitos matemáticos, foi realizado por uma professora de uma escola estadual de São Paulo. Na reportagem feita por Calçade (2018, n.p), a professora afirma que “os alunos

estavam muito eufóricos com as figurinhas do álbum da Copa. Assim, a professora viu a possibilidade de aproveitar o entusiasmo para relacionar com o conteúdo de aula”. Ao ter por base o álbum e as figurinhas, a professora explorou diversos conceitos nas disciplinas, pois, de acordo com ela, as “crianças viram o mapa mundi, conheceram os países que fazem parte dos grupos da seleção, produziram suas bandeiras e os pais contam que a empolgação também foi para dentro de casa” (Calçade, 2018, n.p).

Outra escola municipal, em Sorocaba, estado de São Paulo, também explorou o álbum, ao utilizar as trocas para além do incentivo comercial à compra de figurinhas. A professora estimulou a produção de figurinhas e do álbum na escola (Figuras 11 e 12), ao relatar que “o projeto surgiu com o objetivo de trabalhar o sistema monetário com os alunos do 3º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental. A cada tarefa cumprida¹², eles ganhavam ‘dinheiro’ em papel e depois contavam as notas para comprar as figurinhas” (Bellini, 2018, n.p) tendo cédulas fictícias para efetivar a compra.

Figura 11 - Alunos completando o álbum



Fonte: Bellini (2018).

Figura 12 - Figurinhas com os alunos



Fonte: Bellini (2018).

Além de pensar sobre o sistema monetário, os alunos compartilhavam outras informações sobre a Copa do mundo e sobre as bandeiras dos países, a estabelecer relações com as disciplinas de história e geografia. Um dos alunos que participou desse projeto relatou que ficou “muito mais legal” o estudo do sistema monetário e a criação do álbum, pois, de acordo com ele, “a gente tem o álbum da escola e quem não tem o álbum verdadeiro pode se divertir com esse” (Bellini, 2018, n.p).

Consideramos que os relatos anteriores sobre a relação pedagógica com álbuns e figurinhas, nas escolas públicas, precisam ser evidenciados, pois, nem todos

¹² Ressaltamos que os relatos de aulas apresentados não serão avaliados do ponto de vista pedagógico, nesta dissertação. Nossa intenção é socializar exemplos para buscarmos possibilidades didáticas que possam ser exploradas no ensino da multiplicação em si.

os alunos podem comprar os pacotes de figurinhas. Isso porque, ao levar em consideração a copa masculina de 2022, cada um custou R\$ 4,00. Essa realidade social precisa ser ponderada ao planejarmos nossas ações de ensino, uma vez que devemos buscar possibilidades de inclusão na intensão possibilitar um ensino para todos sem qualquer distinção.

A procura dessas possibilidades, o site fagulha/blog (2022), por exemplo, disponibiliza um álbum, figurinhas e um envelope a ser utilizado como modelo para que os alunos possam criar, desenhar e colorir os jogadores das seleções, (figura 13), sendo uma alternativa para sala de aula.

Figura 13 - Proposta de Álbum da copa para colorir



Fonte: Fagulha/blog (2022).

Com base nos relatos, consideramos que essa situação está presente no dia a dia dos alunos. Ao explorar essas possibilidades, reconhecemos seu potencial para a aprendizagem e para o desenvolvimento dos alunos, a inseri-los em atividade de estudo. Nosso objetivo, é adotar essa situação emergente para mobilizar os alunos a utilizarem a ideia de proporcionalidade do conceito de multiplicação. Passamos, na sequência, a apresentar nossa proposição didática, materializada em forma de SDA.

7.2 O problema desencadeador e as ações de estudo

A elaboração da situação emergente do cotidiano envolveu um longo processo, pois, para pensar em uma proposição didática, é necessário estudar os seus pressupostos teóricos relevantes, pensar sobre possibilidades didáticas, escrever e reescrever a Situação Desencadeadora de Aprendizagem, dentre outras ações de ensino necessárias. Portanto, após definir o sujeito, o conteúdo e a forma, estudamos o conceito de proporcionalidade e levantamos a seguinte questão: quais situações do dia a dia dos alunos envolvem a ideia de proporcionalidade?

Diante dessa pergunta, colocamo-nos a estudar sobre as possibilidades para a Situação Desencadeadora de Aprendizagem. Frente a isso, destacamos a importância do coletivo OPM/UEM para pensarmos a elaboração da situação emergente do cotidiano elaborada. Além das discussões realizadas na OPM/UEM, destacamos a participação, nesse processo, de dois professores de matemática, membros do grupo. Eles nos ajudaram a identificar a possibilidade de manifestação do conceito de proporcionalidade em situações do dia a dia, com que os alunos pudessem se deparar. Inicialmente, a proposta era problematizar receitas, mistura de tintas e pinturas de parede, mas, aos poucos, elas foram se mostrando inviáveis aos nossos propósitos. Depois de muitas discussões, elaboramos a seguinte situação desencadeadora de aprendizagem, com possibilidade de levantar problemas que colocassem o estudante em movimento investigativo:

Quadro 3 - Situação emergente do cotidiano “figurinha da copa”

Na escola, para completar o álbum, os alunos se reúnem para trocar figurinhas comuns e douradas da Copa. Pedro tinha 7 figurinhas douradas repetidas e precisava trocar por figurinhas comuns que faltavam em seu álbum. Os alunos combinaram que as douradas, são consideradas raras e mais difíceis de serem encontradas nos pacotinhos, portanto, deveriam ser trocadas com um valor maior quando comparadas àquelas comuns. O combinado entre os alunos era que 1 figurinha dourada seria trocada por 6 figurinhas comuns. Foi então que surgiu um dos problemas específico: Mateus¹³ estava com 20 figurinhas comuns repetidas. Com essa quantidade, quantas trocas de figurinhas comuns por figurinhas douradas com Pedro, Mateus fará? Como podemos auxiliar os dois garotos a fazer essa troca?

Fonte: da autora (2024).

Pensamos na situação – Quadro 3 – como uma das possibilidades para desenvolver, com os alunos, a ideia multiplicativa de proporcionalidade. Será que a Situação Desencadeadora de Aprendizagem, aqui proposta, a contempla, além das significações matemáticas no ensino dessa ideia, presente na multiplicação? Em busca de avaliar e termos essas respostas, sistematizamos uma possível resolução para a referida Situação Desencadeadora de Aprendizagem. Para tanto, utilizamos as seis ações de estudos ressaltadas por Davidov (1988). Salientamos que, na resolução, existem diferentes caminhos, mas visualizamos algumas soluções

¹³ Os nomes utilizados são fictícios.

prováveis nas ações, com o objetivo de evidenciar a inter-relação entre as significações matemáticas no ensino de multiplicação.

Destacamos que a condição de 6 por 1 empregado como base de troca na situação emergente foi atribuído por nós. Isso porque a quantidade escolhida, critério, possibilita diversas relações de proporcionalidade apoiada nos números presentes na tabuada. Caso os alunos queiram alterar esse valor para 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 ou qualquer outro valor desejado, a situação problema continua possível. Ao considerar essas possibilidades numéricas, podemos visualizar uma alteração no campo de variação, pois, além do critério de figurinhas comuns e douradas, os alunos podem pensar em outros atributos para realizarem as trocas. Cita-se, por exemplo, jogadores mais famosos e mais caros da seleção brasileira, das equipes completas ou, ainda, quando se precisar de menos figurinhas para completar o álbum. Isso poderá justificar novos valores de base para as trocas.

A questão problematizada considera que Mateus estava com 20 figurinhas comuns repetidas. Com essa quantidade, quantas trocas de figurinhas comuns por figurinhas douradas com Pedro, Mateus poderá fazer? A possível resolução será analisada ao considerar as ações de estudos, as tarefas de estudo e particulares propostas por Davídov (1988). Para isso, sistematizamos as ações que podem ser realizadas no Organograma 2, a fim de auxiliar na compreensão.

Organograma 2 – Ações de estudo com base na Situação Desencadeadora de Aprendizagem elaborada



Fonte: da autora (2024).

Com base no Organograma 2, constatamos que o professor pode direcionar a tarefa¹⁴ proposta, de forma que os alunos realizem as ações de estudo propostas por Davídov (1988), por meio de tarefas particulares. A resolução será feita em um movimento dialético, até se chegar à solução que permita perceber a relação universal do conceito de multiplicação, ao explorar a inter-relação entre a aritmética, a álgebra e a geometria. Rosa *et al.* (2016, p. 7) destacam que as significações matemáticas se inter-relacionam “nos procedimentos de redução do concreto ao abstrato (modelação

¹⁴ Consideramos a Situação Desencadeadora de Aprendizagem proposta como tarefa de estudo, pois, em seu processo de solução, contempla as ações de estudo de Davídov (1988).

objetal, gráfica e literal), e de ascensão do abstrato ao concreto (diferentes aplicações)”.

Portanto, por meio de uma tarefa de estudo, o aluno resolverá tarefas particulares pertinentes às seis ações de estudos de Davíдов (1988). A inter-relação deve ser considerada como um princípio relevante, pois permitirá perceber a relação “[...] do universal com o particular e o singular” (Davíдов, 1988, p. 151, tradução nossa), que possibilita generalizações teóricas do conceito de multiplicação.

Em busca dessa generalização, a Situação Desencadeadora de Aprendizagem, que propomos, adota por base uma situação singular (6 figurinhas comuns para 1 dourada), em direção à relação universal, que é realizada “por meio da análise de um certo todo com o objetivo de descobrir a sua relação geneticamente inicial, essencial, universal, como base da unidade interna deste todo” (Davíдов, 1988, p. 152, tradução nossa). Essa relação universal é estabelecida pelo procedimento geral de multiplicação $a \cdot b = n$, em que (a) equivale à unidade intermediária (valor da figurinha comum), (b) refere-se à quantidade de vezes que a unidade intermediária se repete (figurinha dourada) e (n), à quantidade total de unidade básica (figurinha total comum). Ao compreender esse modelo, os alunos poderão resolver tarefas particulares, pela relação $6 \cdot b = n$.

A resolução apresentada, a seguir, “parte da relação entre grandezas discretas e contínuas por meio da articulação entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas” (Rosa; Antunes, 2021, p. 183), em direção à formação do desenvolvimento teórico.

7.3 As seis ações de estudo e a situação emergente do cotidiano

Diante da situação emergente do cotidiano, por nós elaborada, demonstramos como a SDA e as ações de estudo podem contribuir para o ensino de multiplicação com objetivo de compreender a essência desse conceito e formar generalizações teóricas que nos ajudem a responder o seguinte problema desencadeador: Mateus estava com 20 figurinhas comuns repetidas. Com essa quantidade, quantas trocas de figurinhas comuns por figurinhas douradas com Pedro, Mateus fará? A escolha por pensar em possíveis soluções ao problema, a ter como base as ações de estudo de

Davídov (1988), é um caminho que possibilita a inter-relação entre a aritmética, a geometria e a álgebra.

Primeira ação de estudo

A primeira ação de estudo consiste em transformar os dados da tarefa para revelar a essência do conceito de multiplicação por meio da relação entre grandezas (Davídov, 1988). Nessa ação, deve-se realizar a análise mental de forma objetual-sensorial, em que “ocorre a revelação dos elementos que compõem a essência do objeto estudado [...] e iniciamos o movimento de redução do abstrato ao concreto” (Rosa; Garcia; Lunardi, 2021, p. 86).

Portanto, a fim de revelar os dados da tarefa proposta, é necessário instigar os alunos a resolverem o problema desencadeador de aprendizagem por meio de questões como: 1) *Qual a necessidade vivenciada por Pedro e Mateus?*; 2) *Como essa necessidade foi apresentada no problema desencadeador das figurinhas?*; 3) *Ao realizar as trocas, qual a grandeza apresentada no problema desencadeador?*

Diante desses questionamentos é possível mobilizar a atenção dos alunos para os elementos essenciais do problema desencadeador, com o intuito de estabelecer a relação com a grandeza quantidade, ao comparar as figurinhas comuns com as douradas. Na SDA, portanto, os alunos poderão reconhecer a ideia de proporcionalidade por meio das trocas estabelecidas por Pedro e Mateus, ao compreenderem a relação universal do conceito de multiplicação.

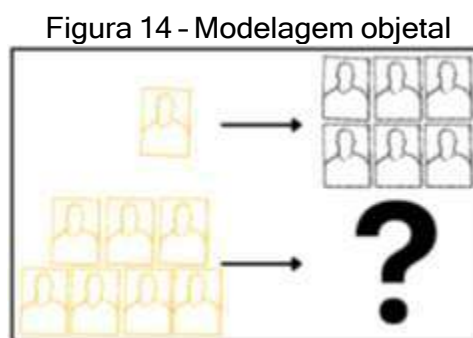
Ao pensarmos sobre essas questões, é possível reconhecer os elementos que compõem a relação essencial, que deve ser modelada na segunda ação de estudo: grandeza a ser medida (quantidade de figurinhas douradas), unidade de medida (quantidade de figurinhas comuns) e o resultado obtido pela troca das figurinhas. O importante, é que os alunos identifiquem a unidade intermediária, no caso 6, unidade gênese do conceito de multiplicação e, por consequência, a relação de proporcionalidade com a unidade básica.

Segunda ação de estudo

A segunda ação consiste no uso de modelos essenciais que podem ser representados na forma objetual, gráfica e literal. Nesse momento, é necessário, por

consequente, transformar os elementos essenciais revelados na primeira ação em modelos que possam revelar “o elo internamente essencial no processo de assimilação de conhecimentos teóricos e procedimentos de ação generalizados.” (Davidov, 1988, p. 182, tradução nossa). Esses modelos buscam estabelecer a relação universal do conceito de multiplicação para que seja realizada sua análise posterior.

A fim de chegar na modelação, o professor pode dirigir, aos alunos, as seguintes perguntas: *qual é a relação entre a quantidade de figurinhas de Pedro e Mateus? Qual a proporção de figurinhas comuns e douradas para realizar a troca?*. Nesse momento, o aluno poderá comparar a quantidade de figurinhas na forma objetal ao utilizar as próprias figurinhas, a explorar a ideia de proporcionalidade, ou seja, 6 figurinhas comuns para 1 dourada, como mostra a figura 14.



Fonte: da autora (2024).

Com as figurinhas, o aluno pode compreender a proporcionalidade ao representar grupos de 6 figurinhas comuns por outro grupo de 1 Figurinha dourada. Nessa representação, está presente a relação singular no conteúdo de álgebra, pois temos 7 grupos de figurinhas douradas e queremos saber quantas figurinhas comuns serão trocadas, assim há uma incógnita a ser resolvida, isto é, um valor não conhecido.

Identificamos, também, a presença da aritmética na ideia de proporção. Isso porque, para resolver o problema, é necessário fazer comparação entre as quantidades. Ao invés de realizar a contagem um a um das figurinhas, a ideia proporcional da multiplicação, como demonstrado na figura 15, se for adotada, permitirá que o cálculo seja feito de forma mais rápida e precisa. Com isso, se estabelecerá a relação entre grandezas, tendo como base a adição de parcelas iguais. De acordo com Caraça (1951), a adição de parcelas iguais é a essência da multiplicação e possibilita a compreensão do movimento lógico-histórico, pois gera a

necessidade do controle de grandes quantidades tal como aconteceu com a humanidade.

Figura 15 - Cálculo das quantidades

	QUANTIDADE DE FIGURINHAS DOURADAS	QUANTIDADE DE FIGURINHAS COMUNS	
+1	1	6	+6
+1	2	12	+6
	3	18	
	⋮	⋮	
+1	7	?	+6

Fonte: da autora (2024).

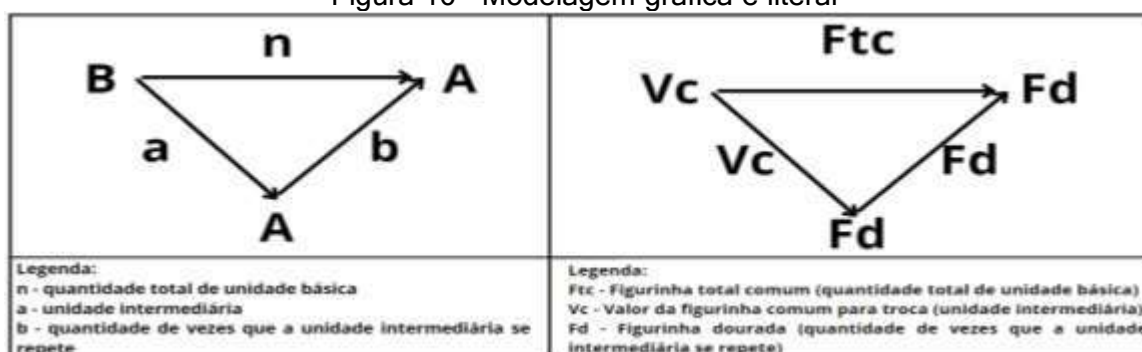
É possível compreender, ao analisar o quadro comparativo da figura 15, que a quantidade de figurinhas comuns necessárias para trocar pelas douradas aumentará gradativamente na mesma proporção. Diante disso, em busca da compreensão da essência da multiplicação, é preciso chegar em “um modelo geral, válido para qualquer situação particular abarcada pela relação universal do modelo de estudo” (Rosa; Antunes, 2021, p. 193). Para chegar a esse modelo geral, pode-se questionar aos alunos: *Como podemos resolver o problema se não soubéssemos a quantidade de figurinhas douradas e comuns utilizadas para realizar a troca?*

Diante dessa pergunta, os alunos podem representar graficamente as comparações realizadas com o objeto e no quadro, em direção a um modelo geral para a solução do problema. A representação do modelo universal gráfico do conceito de multiplicação, estabelecido pela significação geométrica, de acordo com Gorbov, Mikulina e Savieliev (2009), é realizada por meio de um esquema de setas e segmentos, o que permite revelar a representação bidimensional, um dos nexos da geometria. Portanto, juntamente com o professor, os alunos podem traçar uma seta da esquerda para baixo, que representará a (unidade intermediária) ou V_c (valor da figurinha comum), ao corresponder à unidade intermediária ou ao valor da figurinha comum para realizar a troca.

Na sequência, acrescenta-se uma seta de baixo para cima na direção da esquerda para direita que representará b (quantidade de vezes que a unidade intermediária se repete) ou F_d (Figurinha dourada), na representação gráfica, que seria a quantidade de vezes que a unidade intermediária se repete ou a quantidade de figurinhas douradas para realizar a troca. Por fim, como demonstramos na Figura

16, traça-se uma seta da esquerda para direita – fechar o triângulo – para representar o valor total de figurinhas comuns trocadas pelas douradas, isto é, a quantidade total de unidade básica, representada pela letra n (quantidade total de unidade básica) ou Ftc (figurinha total comum). Desse modo, é possível chegar no modelo gráfico de multiplicação proposto por Gorbov, Mikulina, Savieliev (2009). Ressaltamos que, no primeiro modelo, evidenciado na figura 16, as letras utilizadas (a , b , n) têm como base o modelo universal de Caraça (1951) e Davídov (1988). No segundo, as letras utilizadas se relacionam com o problema desencadeador proposto (Vc , Fd , Ftc).

Figura 16 - Modelagem gráfica e literal



Fonte: da autora (2024).

Diante do modelo geral, o aluno poderá explorar a álgebra simbólica, aquela em que se utilizam símbolos para representar uma operação, com sua representação literal, que revela a relação entre a multiplicação, a aritmética e a álgebra: $a \times b = n$ ou $Vc \times Fd = Ftc$, em que é atingida “a abstração máxima da relação essencial. Concluimos, assim, o movimento de redução do concreto ao abstrato” (Rosa; Antunes, 2021, p. 195). Nesta representação, observa-se a relação $Ftc = Fd \times Vc$, em que a significação algébrica revela o **modelo geral** de multiplicação. Portanto, na próxima ação, a intenção é promover o movimento de ascensão do abstrato ao concreto.

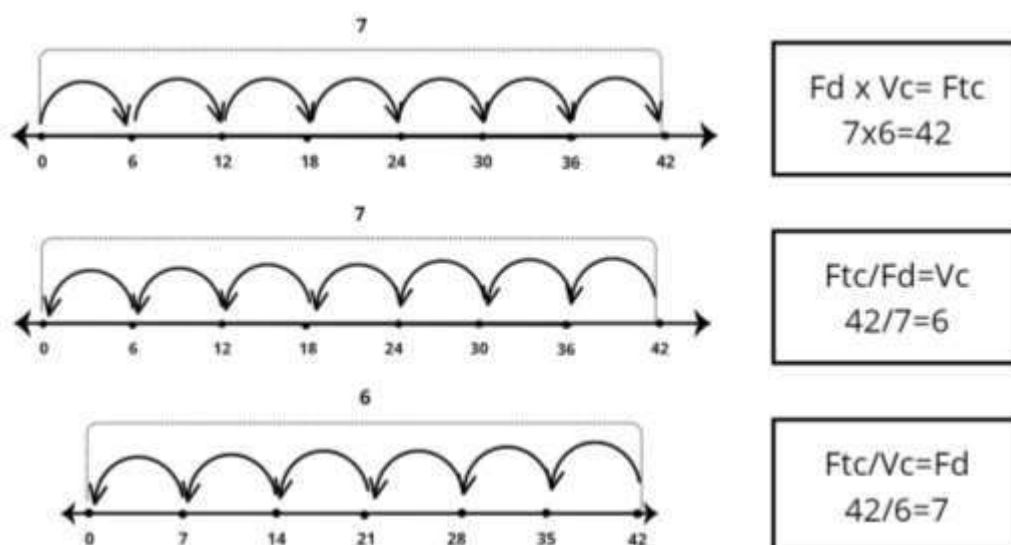
Terceira ação de estudo

A terceira ação consiste em transformar o modelo universal para estudar as propriedades da multiplicação em forma pura, cujo objetivo é desenvolver, nos alunos, “um certo procedimento geral que visa resolver a tarefa de estudo e assim formar o conceito sobre a “célula” inicial deste objeto” (Davídov, 1988, p. 183, tradução nossa).

Portanto, diante do modelo universal de multiplicação $a \times b = n$, os alunos podem perceber que, apesar de mudarmos a quantidade de figurinhas, utilizamos a mesma operação para descobrir a quantidade obtida nas trocas delas. É possível variar a unidade de medida intermediária para 1, 2, 3, 4, 5, 6, entre outros números de figurinhas estabelecidos. Isso permite a alteração do campo de variação (a); (b) será o número de vezes que precisaremos da figurinha para realizar a troca; (n) será a quantidade de figurinhas trocadas. Ao compreender essa relação universal do conceito de multiplicação, o aluno poderá resolver diferentes tarefas particulares, ao permitir que concretizem “[...] o procedimento geral previamente encontrado e, com ele, o conceito correspondente (a ‘célula’)” (Daviđov, 1988, p. 183, tradução nossa). Nessa terceira ação de estudo, é possível revelar a gênese do conceito de multiplicação, diante dos elementos revelados na primeira ação e modelados na segunda.

Nessa ação, é possível realizar a modificação do modelo universal $a.b = n$ para $n/b = a$ ou $n/a = b$, na direção de promover a compreensão da relação entre as letras constituintes do modelo e o estudo de suas propriedades gerais. Portanto, é possível revelar que, no modelo $a/b = n$ ou $a = n.b$, com a modificação da unidade b , se medir a mesma grandeza a leva à mudança do número concreto n , isto é, aquele que indica a quantidade de vezes que b cabe em a . Desse modo, quando levamos em consideração o problema desencadeador proposto, se modificarmos o modelo universal $Vc.Fd = Ftc$ por $Ftc/Fd = Vc$, ao dividir o total de figurinhas comuns pelo total de figurinhas douradas, é possível descobrir o valor da figurinha comum ou, ao mudar para $Ftc/Vc = Fd$, a divisão do total de figurinhas comuns pelo valor da figurinha comum resultará no total de figurinhas douradas. Essa modificação do modelo permite o estudo do modelo literal, com o intuito de compreender a relação estabelecida entre as letras. Diante dos modelos literais, é possível realizar a representação na reta numérica assim como demonstrado na figura a seguir:

Figura 17 - operação na reta numérica



Fonte: da autora (2024).

Pela reta numérica, os alunos poderão efetuar as operações utilizando a quantidade do problema desencadeador proposto, $Fd - 7$; $Vc - 6$; $Ftc - 42$. Desse modo, é possível constatar a relação dos modelos, ao realizar a operação inversa da multiplicação (divisão).

Quarta ação de estudo

Nesta ação, será realizada a construção de um sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas pelo modelo universal iniciado na ação anterior.

Graças a esta ação, os escolares concretizam a tarefa de estudo inicial e a convertem na diversidade de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento único (geral), compreendido durante a realização das anteriores ações de estudo. O caráter eficaz deste procedimento se verifica, justamente, na solução de tarefas particulares (Davióv, 1988, p. 183, tradução nossa).

Desse modo, para verificar a eficácia do modelo universal revelado anteriormente, pode-se retornar à pergunta norteadora da Situação Desencadeadora de Aprendizagem: *Sabendo que Pedro tem 7 figurinhas douradas, Mateus tem 20 figurinhas comuns repetidas e que 1 figurinha dourada seria trocada por 6 figurinhas comuns, portanto, quantas trocas de figurinhas comuns Matheus fará por figurinhas douradas de Pedro?*

Por meio da representação literal, algébrica, a (unidade intermediária/UI) \times b (quantidade de vezes que a UI se repete) = n (unidade básica) ou Fd (Figurinhas

douradas) $\times V_c$ (Valor da figurinha comum) = F_{tc} (Figurinha total comum), é possível que, com orientação do professor, os alunos constatem quantas figurinhas comuns seriam necessárias para realizar a troca com as douradas. Afinal, para que Pedro consiga trocar as suas 7 figurinhas douradas, seriam necessárias 42 figurinhas comuns. Os alunos poderão chegar à conclusão que, com 20 figurinhas comuns, Mateus poderá trocar 18 e restará 2. Ao realizar a troca, Mateus conseguirá 3 douradas e sobrarão, das 7 figurinhas douradas de Pedro, apenas 4.

Essa representação literal possibilita que os alunos generalizem o conceito de multiplicação que, de acordo com Davýdov (1982, p. 250, tradução nossa), opera “por meio da análise e abstração dos atributos essenciais das coisas [...]”. Assim, se Pedro tiver mais 7 figurinhas douradas, a quantidade necessária de figurinhas comuns para realizar a troca será proporcional à descoberta na representação literal ($F_{tc} = 42$), sendo duas vezes essa quantidade, ou seja, $42 \times 2 = 84$ figurinhas comuns, porque a quantidade de figurinhas aumentará proporcionalmente em duas vezes.

Além disso, entender a relação de proporcionalidade de 6 para 1, auxiliará na comparação e na contagem das quantidades, mesmo se os valores mudarem, as quantidades aumentam na mesma proporção. Portanto, nessa ação, os alunos podem compreender a relação universal-particular-singular do problema proposto, $F_{tc} = F_d \times V_c$, a significação algébrica como **modelo geral**; $F_{tc} = 6V_c$, uma significação algébrica **particular**; $F_{tc} = 7 \times 6 = 42$ uma significação aritmética **singular**.

Reconhecemos que, na Situação Desencadeadora de Aprendizagem proposta, as ideias multiplicativas de combinação também estão presentes, pois o problema desencadeador trabalha com as possibilidades existentes para formular combinação com duas coleções (figurinhas douradas e comuns). Além disso, como ideia central, temos a proporcionalidade, pois as figurinhas aumentam de forma proporcional.

Nesta quarta ação, temos a possibilidade de envolver as outras ideias multiplicativas com diferentes tarefas particulares. Quando se considera as figurinhas comuns e douradas que serão coladas no álbum, essas podem ser vistas em uma organização retangular, sendo possível explorar, com os alunos, sua disposição nas páginas. Podemos, também, envolver a adição de parcelas iguais, que permeia as demais ideias e se caracteriza como a essência da multiplicação, por meio do modelo universal $a.b = n$, evidenciado por Caraça (1951) e por Davýdov (1988).

Diante da resolução do problema desencadeador proposto, ao compreender o modelo universal de multiplicação, a resolução do problema proposto pela Situação

Desencadeadora de Aprendizagem pode ser finalizada com a escrita de uma carta, produção de um vídeo ou um áudio direcionado a Pedro e Mateus, com a explicação de como os alunos procedem para as trocas de figurinhas, independentemente do valor escolhido por eles. A escrita da carta ou a produção do vídeo ou do áudio têm o objetivo de sintetizar o movimento realizado na solução do problema, ao evidenciar o modelo universal de multiplicação, que permite a resolução de diferentes situações.

Quinta ação de estudo

A quinta ação consiste no controle da realização das ações anteriores, que permitirá assegurar a realização correta das ações pelos alunos. Sua “principal função é garantir [...] que o aluno resolva com sucesso a diversidade de determinadas tarefas concretas particulares” (Daviđov, 1988, p. 216, tradução nossa).

Desse modo, é possível analisar se os alunos assimilaram o modelo geral de solução do problema proposto, por meio da relação universal do conceito de multiplicação, sendo “um exame qualitativo substancial do resultado da aprendizagem em comparação com o objetivo do ensino” (Freitas, 2016, p. 414-415). Portanto, os alunos podem realizar uma avaliação de sua atividade de estudo e de suas ações mentais, para verificar a necessidade de reorganização no cumprimento das ações, com a finalidade de compreenderem que, ao utilizar o modelo universal de multiplicação, poderão resolver diferentes tarefas particulares.

Sexta ação de estudo

A quinta ação está ligada à sexta, que é a avaliação da apropriação do procedimento universal como resultado da solução da tarefa de estudo dada. A avaliação pode ser vista durante a realização das demais ações com o intuito de obter e empregar “o número como meio especial de comparação das grandezas” (Daviđov, 1988, p. 186, tradução nossa), que determina a ocorrência ou não da apropriação do procedimento universal de solução da tarefa de estudo e suas modificações.

Por meio da avaliação, é possível determinar se houve ou não a apropriação do modelo universal do conceito de multiplicação. Isso pode ser realizado ao se verificar se todas as ações de estudo foram realizadas e se houve a compreensão da relação universal. Além disso, a carta ou outra forma utilizada para responder o

problema proposto, ao sintetizar como seriam realizadas as trocas de figurinhas, é um instrumento que auxilia na avaliação da compreensão dos alunos, ao perceber se houve ou não a apropriação do conceito estudado.

Assim, com as ações apresentadas, concluímos a solução do problema desencadeador das figurinhas da copa. A resolução apresentada permite que as significações se inter-relacionem no ensino do conceito multiplicativo. Ao se problematizar a troca de figurinhas comuns por douradas, fez-se necessário explorar a ideia de proporcionalidade, relacionada à aritmética, à álgebra e à geometria.

No problema desencadeador proposto, ao realizar as trocas das figurinhas comuns e douradas, é possível evidenciar a ideia de proporcionalidade e o modelo universal de multiplicação (aritmética e álgebra). No processo de solução, a seguir as ações de estudo de Davídov (1988), a representação gráfica apresenta a significação geométrica, por meio da representação bidimensional, revelada pelas setas e por retas. Por sua vez, a relação entre as grandezas e o modelo universal da multiplicação por meio de letras evidencia a presença do caráter algébrico.

Diferentemente da lógica tradicional, que tem como característica a “Descrição do processo formativo dos conceitos por ‘simples abstração e generalizações’ dos dados perceptíveis, e a interpretação do conceito como um ‘produto abstrato da percepção, generalizado e formulado com a ajuda da linguagem’” (Davídov, 1982, p. 262, tradução nossa), o problema desencadeador apresentado tem como base os estudos de Davídov (1982, 1988). Portanto, viabiliza, aos alunos, por meio de uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem, o desenvolvimento do pensamento teórico.

A situação emergente do cotidiano buscou evidenciar a relação entre universal/particular/singular, em que é possível notar, em sua constituição, “que a realidade do universal como forma específica, juntamente com a forma do particular e do singular, se revela precisamente na inter-relação dos fenômenos particulares e singulares” (Davídov, 1988, p. 146, tradução nossa). Nesse movimento entre universal/particular/singular, a SDA evidenciou a essência do conceito de multiplicação, por meio de seu modelo universal.

Ressaltamos que a Situação Desencadeadora de Aprendizagem apresentada só possibilitará a aprendizagem e o desenvolvimento teórico dos alunos, por meio de um processo sistematizado que permita que os alunos formem abstrações e generalizações teóricas e que desenvolvam suas funções psicológicas superiores.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na presente dissertação, compreendemos que a matemática, além de ser uma disciplina escolar, é uma linguagem produzida historicamente pelo homem, diante das necessidades instrumentais e integrativas que interferem em sua sobrevivência na sociedade.

Durante seu processo de constituição, a humanidade precisou satisfazer, dentre tantas necessidades, o controle de quantidades, de medidas e de grandezas, com emprego de conhecimentos que caracterizam a essência da matemática. É, portanto, indispensável que o homem se aproprie dessa linguagem e, nesse processo, torna-se essencial que seus conhecimentos sejam ensinados de forma planejada e sistematizada. É a escola a responsável por assegurar a todas as pessoas essa apropriação.

Para que isso seja possível, torna-se necessária a organização do ensino na direção de promover a compreensão dos diferentes conceitos matemáticos, entre eles, a multiplicação. A multiplicação surgiu diante da necessidade de controlar grandes quantidades por meio de cálculos rápidos e precisos.

Em busca de compreender e estudar sobre a multiplicação, esta pesquisa teve como objetivo investigar o ensino do conceito de multiplicação nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a fim de estabelecer a relação entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas. Com o intuito de atingir o objetivo destacado, baseamos nossos estudos nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, em especial em Davýdov (1982) e Davídov (1988) e na Atividade Orientadora de Ensino (AOE). Para tanto, elaboramos uma situação emergente do cotidiano relacionadas às figurinhas da copa com o intuito de desenvolver a ideia de proporcionalidade, peculiar ao conceito da multiplicação.

A Situação Desencadeadora de Aprendizagem foi elaborada, como que direcionada para os alunos do 4º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental (sujeito), voltada ao ensino da multiplicação (conteúdo), com base em uma situação emergente do cotidiano (forma). Ao definirmos e priorizarmos sujeito, conteúdo e forma, defendemos que, ao planejar o trabalho educativo, essa tríade seja levada em consideração na organização do ensino. Ao considerá-la, o professor, ao planejar suas ações, pode potencializar a aprendizagem e o desenvolvimento dos alunos.

Por que, pensar essa tríade com a exploração da situação com as figurinhas? É certo que a editora Panini, ao criar o álbum de figurinhas, não tinha intenção de elaborar o álbum para fins pedagógicos. Porém nós, professores, ao termos clareza do que temos que ensinar, reconhecemos possibilidades didáticas em diferentes recursos e objetos. O trabalho com as figurinhas se configurou como uma estratégia capaz de mobilizar os alunos a estarem em atividade de estudo.

A ideia de proporcionalidade, apresentada na situação emergente do cotidiano elaborada, envolve diferentes ações mentais em relação às demais ideias multiplicativas. Os estudos de Caraça (1951) e Davídov (1988) revelam que a proporcionalidade se volta para a adição de parcelas iguais, que é a essência da multiplicação, evidenciada por meio da relação entre a unidade intermediária e básica, em seu procedimento geral ($a \cdot b = n$). No problema desencadeador proposto, foi possível evidenciar a ideia de proporcionalidade, na adição de parcelas iguais, em busca da gênese do conceito multiplicativo, revelado em seu modelo universal, ao viabilizar a inter-relação entre a aritmética, a geometria e a álgebra.

Ensinar a multiplicação – num contexto de relação entre a aritmética, a geometria e a álgebra – é uma proposta de Davídov (1988). Para o autor, o ensino da matemática deve superar o pensamento empírico, em busca de generalizações teóricas e uma formação humanizadora, mediante a apropriação do conhecimento científico.

Com os estudos realizados, compreendemos que o movimento dialético entre o concreto e o abstrato deve ser considerado, por meio da relação entre o singular-universal-particular. Dessa forma, a essência da multiplicação foi revelada no modelo universal, diante do movimento realizado na proposição que considerou as figurinhas da copa, com o intuito de possibilitar generalizações teóricas.

Portanto, na pesquisa, evidenciamos que as ações de estudo de Davídov (1988), na resolução de uma tarefa de estudo com a Situação Desencadeadora de Aprendizagem das figurinhas, são um caminho que potencializa a compreensão da multiplicação. Desse modo, a relação universal desse conceito com as significações matemáticas foi revelada na primeira ação, modelada na segunda, transformada na terceira ação e resolvida na quarta, ao estabelecer o controle e a avaliação diante da quinta e sexta ações.

Para que as ações de estudo possibilitem a apropriação da inter-relação entre as significações matemáticas, é necessário que o professor compreenda o conceito e assuma um papel interrogador na resolução do problema desencadeador.

Sabemos, contudo, que, muitas vezes, o professor não se sente preparado para tanto. Portanto, as formações contínuas e continuadas são essenciais para que, por meio de momentos formativos, o professor, em coletivo, possa aprender com diferentes ações teórico-metodológicas e direcionar sua ação docente.

Consideramos que o ensino da multiplicação e da matemática como um todo não pode dicotomizar suas significações, o que implica em mais investigações sobre o tema a fim de instrumentalizar professores e assegurar a aprendizagem dos alunos.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, A. A.; EIDT, N. M. Psicologia histórico-cultural e a atividade dominante como mediação que forma e se transforma: contradições e crises na periodização do desenvolvimento psíquico. Obutchénie: **R. de Didat. e Psic. Pedag.** Uberlândia, MG. v.3, n.3, p.1-36, 2019.

ALEKSANDROV, A. D. *et al.* **La matemática**: su contenido, métodos y significado. Madrid: Alianza Editorial S.A., 1994.

ARAUJO, E. S.; MORAES, S. G. Dos princípios da Pesquisa em Educação como Atividade. In: MOURA, M. O. (Org.). **Educação Escolar e Pesquisa na Teoria Histórico-Cultural**. 1 ed. São Paulo: Loyola, 2017, v., p. 47-70.

BERNEIRA, C. R. R. **Formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais**. 2021. 115 f. Dissertação (Mestrado em Educação)- Universidade Federal do Pampa, Jaguarão, 2021.

BELLINI, J. Professores criam álbum de figurinhas da Copa do Mundo com fotos dos alunos em Sorocaba. **G1**, 2018. Disponível em: <https://g1.globo.com/sp/sorocaba-jundiai/noticia/professores-criam-album-de-figurinhas-da-copa-com-fotos-dos-alunos-em-sorocaba.ghtml>. Acesso em: set. de 2023.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Mec, 2018.

BRASIL. **Sobre a CAPES**. Brasília, 2021. Disponível em: <https://www.gov.br/capes/>. Acesso em: 02.jun.2023.

CALÇADE, P. Como usar a copa do mundo nas aulas de matemática. **Nova escola**, 2018. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/11804/como-usar-a-copa-do-mundo-nas-aulas-de-matematica>. Acesso em: set. de 2023.

CAMILI, M. C. M. **Estruturas multiplicativas: um estado do conhecimento** (2009 - 2019). 2021. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação para ciência)-Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2021.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa, 1951.

CATENA, C. E. **O desenvolvimento da ideia de proporcionalidade nos anos iniciais do ensino fundamental: um estudo sobre o projeto EMAI**. 2023. Dissertação (mestrado em educação) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Filosofia e Ciências, São Paulo, 2023.

CEDRO, W. L.; MORETTI, V. D.; MORAES, S. P. G. Desdobramentos da atividade orientadora de ensino para a organização do ensino e para a investigação sobre a atividade pedagógica. **Linhas Críticas**, Brasília, DF, v. 24, p. 431-452, 2019.

CRESTANI, S. **Organização do ensino de matemática na perspectiva do desenvolvimento do pensamento teórico: uma reflexão a partir do conceito de divisão**. 2016. 124 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2016.

DAMAZIO, A. *et al.* O conhecimento matemático na Educação Infantil. In: FLÔR, D. C.; DURLI, Z. (org.). **Educação Infantil e Formação de Professores**. Florianópolis: Editora UFSC, 2012, p. 179-192.

DAVÍDOV, V. V. **La enseñanza escola y el desarrollo psíquico: investigación teórica y experimental**. Trad. Marta Shuare, Moscú: Editorial Progreso, 1988.

DAVÍDOV, V. Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. In: SHUARE, M. **La Psicología evolutiva y pedagógica em la URSS**: Antologia. Moscou: Progeso, 1987, p. 143-154.

DAVÝDOV, V. V. **Tipos de generalización en la enseñanza**. 3. ed. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

DIAS, M. da S., MORETTI, V. D. **Números e operações: elementos lógico-históricos para atividade de ensino.** 1 Ed. Curitiba: Ibpex, 2011.

ELKONIN, D. B. Desarrollo psíquico de Los escolares. In: SMIRNOV, A. A. *et al.* **Psicología.** México: Grijalbo, 1969, p. 523-560.

ELKONIN, D. Problemas psicológicos del juego en la edad escolar. In: Shuare, M. (Org.). **La psicología evolutiva e pedagógica en la URSS – Antología.** Moscou: Progreso, 1987, p.83- 102.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas: Ed. Unicamp, 2011.

FAGULHA/BLOG. Álbum da Copa para colorir na sala de aula. **Fagulha/blog**, 2022. Disponível em: <https://fagulha.fun/blog/2022/09/22/album-da-copa-para-colorir-na-sala-de-aula/>. Acesso em: set. de 2023.

FERRO, L. L. de S. **A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO NA EDUCAÇÃO INFANTIL COMO ATIVIDADE:** um estudo a partir dos conceitos matemáticos. 255 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Maringá. Orientadora: Silvia Pereira Gonzaga de Moraes. Maringá, 2023.

FONSECA, C. T. C. **Discalculia associada ao transtorno de déficit de atenção e hiperatividade:** um estudo sobre as operações de multiplicação e divisão considerando os mecanismos compensatórios. 2021. 116 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciência e Matemática) - Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2021.

FONTES, M. da S. **Experimento didático desenvolvimental em matemática no contexto do curso de pedagogia.** 2019. 127 f. Dissertação (Mestrado em Educação)-Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2019.

FREITAS, J. R. G. **Os Nexos Conceituais, a Ludicidade e as Ações Coletivas no processo de aprendizagem de Geometria no Clube de Matemática.** Dissertação -

Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2022.

FREITAS, R. A. M. M.. Formação de conceitos na aprendizagem escolar e atividade de estudo como forma básica para organização do ensino. **EDUCATIVA (GOIÂNIA. ONLINE)**, v. 19, p. 388-418, 2016.

GALDINO, A. P. S. **O conhecimento matemático de estudantes do 3º ano do ensino fundamental sobre o conceito de multiplicação**: um estudo com base na teoria histórico-cultural. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2016.

GIL, M. L. E.; LACANALLO-ARRAIS, L. F. L. **A multiplicação e o ensino**: um estudo a partir das proposições de Davydov. *Colloquium Humanarum*, Presidente Prudente, v. 18, p.77-85, 2021.

GIL, M. L. E.; LACANALLO-ARRAIS, L. F. L.; ROCHA, M. R. da. Situação Desencadeadora de Aprendizagem: proposta para o ensino de multiplicação nos anos iniciais de escolarização. In: ROYER, M. R. **Formação de professores**: práticas e reflexões. São Paulo: Pimenta Cultural, 2023, p. 224 – 241.

GIL, M. L. E.; SILVA, J. L. S.; LACANALLO-ARRAIS, L. F. O ensino da multiplicação: conhecendo as produções e pesquisas. **Revista Cocar**, [S. l.], v. 19, n. 37, 2023. Disponível em: <https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/7271>. Acesso em: 16 jan. 2024.

GORBOV, S. F.; MIKULINA, G. G.; SAVIELIEV, O. V. Ensino de matemática. 2 ano: livro do professor do ensino fundamental (sistema do D. B. Elkonin - V. V. Davidov)/ S. F. Gorbov, G. G. Mikulina, O. V. Savieliev. 3ª ed., Moscou, **VITA-PRESS**, 2009.

HOBOLD, E. S. F. **Proposições para o Ensino da tabuada com base nas Lógicas Formal e Dialética**. 2014. 199 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2014.

IFRAH, G. **Os números**: história de uma grande invenção. Tradução Stella Maria de Freitas Senra. Rio de Janeiro: Globo, 1989.

IFRAH, G. **História universal dos algarismos, volume 1**: a inteligência dos homens contida pelos números e pelo cálculo. Tradução Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, v.2, 1997.

LANNER de MOURA, A. R. **A medida e a criança pré-escolar**. 1995. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1995.

LANNER de MOURA, A. R.; MOURA, M. O. de. **Geometria nas séries iniciais**. São Paulo: 2001.

LAROCCA, P.; ROSSO, A. J.; SOUZA, A. P. de. A formulação dos objetivos de pesquisa na pós-graduação: uma discussão necessária. **Revista Brasileira de Pós-Graduação - Capes**, Brasília, v. 1, n. 1, p. 118-133, 2005.

LEONTIEV, A. N. Las necesidades y los motivos de la actividad. In: SMIRNOV, A. A. et al. **Psicología**. México: Editorial Grijalbo, 1978a. 341-324.

LEONTIEV, A. N. **Actividad, conciencia y personalidad**. Buenos Aires: Ediciones Ciencias Del Hombre, 1978b.

LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. São Paulo: Centauro, 2004.

LEONTIEV, A. N. Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: VIGOTSKII, L.S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem**. Trad. Maria da Pena Villalobos. 14. ed. São Paulo: Ícone, 2016, p. 59-83.

LURIA, A. R. **Pensamento e linguagem**: as últimas conferências de Luria. Porto Alegre, RS: Artes Médicas, 1987.

MADEIRA, S. C. **“Prática”**: uma leitura histórico-crítica e proposições davydovianas para o conceito de multiplicação. 2012. 168 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2012.

MAME, O. A. C. **Os conceitos geométricos nos dois anos iniciais do Ensino Fundamental na proposição de Davýdov**. 2014. 157 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2014.

MARTINS, L. M. **O desenvolvimento do psiquismo e a educação escolar**: contribuições à luz da psicologia histórico cultural e da pedagogia histórico-crítica. 2011. Tese (Doutorado em Psicologia da Educação) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Bauru, 2011. Disponível em: https://formacaodocente.files.wordpress.com/2012/09/martins_ligia_-_o_desenvolvimento_do_psiquismo_e_a_educacao_escolar.pdf. Acesso em: dez. 2023.

MARTINS, L. M. **As contribuições da psicologia histórico-cultural para a educação do campo**. Vitória da Conquista, BA: Revista RBBA, v. 3, n 02, p. 86-107, 2014.

MARTINS, L. M; LAVOURA, T. N. **Materialismo histórico-dialético**: contributos para a investigação em educação. Educar em Revista. Curitiba: Brasil. V. 34, n. 71, p. 223-239, set./out. 2018.

MORETTI, V. D.; SOUZA, N. M. M. de. **Educação matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**: Princípios e práticas pedagógicas. São Paulo: Cortez, 2015.

MOURA, M. O. de. (Coord.). **Controle da variação de quantidades**: atividades de ensino. 1. ed. São Paulo, Universidade de São Paulo, 1996.

MOURA, M. O. de. A atividade de ensino como unidade formadora. **Bolema**. Rio Claro, UNESP, v. 12, p.29-43, 1997.

MOURA, M. O. Matemática na infância. In: MIGUEIS, M. R.; AZEVEDO, M.G. **Educação matemática na infância: abordagens e desafios**. Serzedo, Vila Nova de Gaia: Gaialivro, 2007. p. 39-64.

MOURA, M. O. Significação do controle do movimento das quantidades: uma perspectiva histórico-cultural. In: Moretti, V. D.; RADFORD, L. **Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais: Diálogos e Complementaridades entre a Teoria da Objetivação e a Teoria Histórico-Cultural**. São Paulo: Livraria da Física, 2021, p. 57-76.

MOURA, M. O. de. (Coord.). **Controle da variação de quantidades: atividades de ensino**. 22. ed. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2023.

MOURA, M. O. de; ARAÚJO, E. S; SERRÃO M. I. B. Atividade Orientadora de Ensino: Fundamentos. **Linhas Críticas**, Brasília, v.24, p.411-430. 2019.

MOURA, M. O. *et al.* Atividade orientadora de ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. **Rev. Diálogo Educ.**, Curitiba, v. 10, n. 29, p. 205-229, jan./abr. 2010.

MOURA, M. O. de *et al.* A Atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem. In: MOURA, M. O. de (Org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Campinas: Autores associados. 2.ed., 2016, p.93-125.

MOURA, M. O. *et al.* **Atividades para o ensino de Matemática nos anos iniciais da Educação Básica**. Ribeirão Preto: Volume IV, Geometria, 2018.

MUKHINA, V. **Psicologia da idade pré-escolar: um manual completo para compreender e ensinar desde o nascimento até os sete anos**. São Paulo: Martins Fontes, 1996.

MURATORI, M. Álbum da copa do mundo feminina 'erra' quatro atletas da Seleção Brasileira. **Seleção**, 2019. Disponível em: <https://www.mg.superesportes.com.br/app/noticias/selecao->

brasileira/2019/05/17/noticia_selecao,585333/album-da-copa-do-mundo-feminina-erra-quatro-atletas-da-selecao.shtml. Acesso em: set. de 2023.

OLIVEIRA, B. A. A dialética do singular-particular-universal. In: ABRANTES, A. A.; SILVA, N. R.; MARTINS, S. T. F. (Orgs.). **Método histórico-social na Psicologia Social**. São Paulo: Vozes, 2005.

PANINI. 2023. Disponível em: <https://www.paniniportugal.com/shpprtpt/>. Acesso em: set. de 2023.

PANOSSIAN, M. L. **O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra**. 2014. Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

PASQUALINI, J. C. A teoria histórico-cultural da periodização do desenvolvimento do desenvolvimento psíquico como expressão do método materialista dialético. In: A. A. ABRANTES; L. M. MARTINS; M. G. D. FACCI (Orgs.). **Periodização histórico-cultural do desenvolvimento psíquico do nascimento à velhice**. Campinas: Autores Associados, 2016. p. 63-90.

PATRICK. Copa 2022: Figurinhas azuis e laranja, da Coca-Cola e outras exclusivas! **Mundo das figurinhas**, 2022. Disponível em: <https://mundodasfigurinhas.com.br/copa-2022-figurinhas-azuis-e-laranja-da-coca-cola-e-outras/>. Acesso em: set. de 2023.

PEIXOTO, V. Álbum da copa: veja como são as figurinhas, quantas são e quanto custa para completar. **UOL**, 2022. Disponível em: <https://www.google.com/url?q=https://interior.ne10.uol.com.br/esportes/2022/08/15064210-album-da-copa-veja-como-sao-as-figurinhas-quantas-sao-e-quanto-custa-para-completar.html&sa=D&source=docs&ust=1696133735800713&usg=AOvVaw30zWk6FGkSfVrxmSvO4WuZ>. Acesso em: set. 2023.

PRADO, A. M. *et al.* Álbum de figurinhas movimenta postos de troca. **Factual_900**, 2022. Disponível em: <https://factual900.com.br/album-de-figurinhas-da-copa-mobilizam-o-pais/>. Acesso em: jan. 2024.

PRINCIOTTI, R. Panini lança livro ilustrado comemorativo aos 80 anos de Marvel. **NERDLICIOUS**, 2020. Disponível em: <https://nerdlicious.com.br/2020/06/panini-lanca-livro-ilustrado-comemorativo-aos-80-anos-de-marvel/>. Acesso em: jan. 2024.

ROSA, J. E. **Proposições de Davydov para o ensino de matemática no primeiro não escolar**: inter-relações dos sistemas de significações numéricas. 2012. Tese (doutorado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Humanas, Curso de Doutorado em Educação, Curitiba, 2012.

ROSA, J. E.; ANTUNES, I. C. Modelagem à luz da Teoria Histórico-Cultural. **ENSINO DA MATEMÁTICA EM DEBATE**, v. 8, p. 182-202, 2021.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A. O ensino da matemática no primeiro ano escolar: uma articulação entre a proposição gepapeana e davydoviana. In: MOURA, M. O. **Educação escolar e pesquisa na teoria histórico-cultural**. São Paulo: Edições Loyola. 2017. p. 153-182.

ROSA, J. E. da; DAMAZIO, A.; CRESTANI, S. Os conceitos de divisão e multiplicação nas proposições de ensino elaboradas por Davydov e seus colaboradores. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.16, n.1, p. 167-187, 2014.

ROSA, J. E. *et al.* As significações algébricas, geométricas e aritméticas no processo de elaboração do sistema conceitual numérico a luz da teoria histórico-cultural. São Paulo: **Educ. Matem. Pesq.**, v.11, n.2, p.329-350, 2009.

ROSA, J. E. *et al.* Fundamentos da teoria histórico-cultural que orientam o modo de organização do ensino de matemática no contexto da atividade orientadora e da proposição davydoviana. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 7., 2016, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. p. 1-8. Disponível em:

https://www.sbemrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6489_3025_ID.pdf. Acesso em: dez. 2023.

ROSA, J. E.; FONTES, M. S. Modo de organização do ensino de matemática à Luz da teoria do ensino desenvolvimental. **Revista Brasileira de Educação**, vol. 27, 2022.

ROSA, J. E.; GARCIA, M. A. C. N.; LUNARDI, M. S. O desenvolvimento de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem por meio das ações de estudo propostas por Davíдов: uma articulação entre Atividade Orientadora de Ensino e Teoria do Ensino Desenvolvimental. **REVISTA SERGIPANA DE MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, v. 6, p. 79-99, 2021.

ROSA, J. E. da; HOBOLD, E. S. F. Movimento entre abstrato e concreto na proposição davydoviana para o ensino de multiplicação. **Inter-Ação**, Goiânia, v. 41, n. 1, p. 143-164, 2016.

SEBASTIÃO, D. **Teoria da atividade e lousa digital no ensino superior: perspectivas para aprendizagem dos conceitos matemáticos**. 2017. 182 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2017.

SILVA, D. A. **Os nexos conceituais algébricos e o jogo matcraft: uma proposta para o ensino de matemática nos anos iniciais de escolarização**. 122 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Maringá. Orientadora: Dra. Luciana Figueiredo Lacanallo Arrais. Maringá, 2022.

SOUSA, M. C. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica: um estudo das elaborações correlatadas de professores do ensino fundamental**. Tese Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2004.

SOUSA, M. C. O ensino de Matemática da Educação Básica na Perspectiva Lógico-Histórica. Mato Grosso do Sul: **Perspectivas da Educação Matemática**, UFMS. v. 7, n. 13, 2014.

SOUSA, M. C. O movimento lógico-histórico enquanto perspectiva didática para o ensino de matemática. Obutchénie. **Revista de Didática e Psicologia Pedagógica**. Uberlândia, MG, v.2, n.1, p.40-68, jan./abr. 2018.

TOLEDO, M; TOLEDO, M. **Didática da matemática**: como dois e dois: a construção da matemática. São Paulo: FTD, 1997.

UTILIDADES, M. B. Álbum capa dura copa do mundo feminina 2023+ 25 figurinhas. **Magic box utilidades**, 2023. Disponível em: https://www.magicboxutilidades.com.br/MLB-3692830572-album-capa-dura-copa-do-mundo-feminina-2023-25-figurinhas-_JM. Acesso em: set. de 2023.

VIANA, A. de S. **Dificuldades com a operação de multiplicação no 6º ano do ensino fundamental**. 2019. 68 f. Dissertação (Mestrado em Gestão Social, Educação e Desenvolvimento Regional) - Faculdade Vale do Cricaré, São Mateus, 2019.

VIGOTSKI, L. S. **Teoria e Método em Psicologia**. São Paulo: Martins Fontes, 2004.

VYGOTSKY, L. S. **Obras escorridas**. Tomo III. Academia de Ciências Pedagógicas de la URSS, 1931.

VYGOTSKY, L. S. **Obras escorridas**. Tomo IV. Madrid: Visor, 1996.

VYGOTSKY, L. S. **Obras escorridas**. Tomo II. Madrid: A. Machado Libros, 2001.